712

उर्दू संग्रह

पुस्तक का नाम इल्म हिन्दसा नज़री

लेखक मौलवी अहमद हुसैन साहब

प्रकाशन वर्ष 1931

आगत संख्या 712

712

712,U

712

فہرست مضامین

علم ہندسۂ نظری

پہلا باب

مثلث کے بعض خواص

تعریفات ۱
مرکز عمودی ۲
نو نقطی دائرہ ۴
خط پائین ۹
خطوط وسطی ۱۰

712;U

دوسرا باب

دائروں کے بعض خواص

قطب اور قطبی ۱۹
مزدوج نقطے اور خطوط ۲۲
بنیادی محور ۲۵
ہم محور دائرے ۲۸

دو دائروں کے مشترک مماس ۳۱

تیسرا باب

علامتوں کا استعمال۔ نقطوں کا ہم خط اور خطوں کا ہم نقطہ ہونا

خطوں، رقبوں، زاویوں کی علامتیں ۴۰
مینلاس اور سیوا کے مسئلے ۴۵
متساوی الزاویہ مزدوج ۵۲
شبہ وسطی ۵۳

چوتھا باب

تظلیل

عام اصول ۵۸
زاویوں کو دی ہوئی مقدار کے زاویوں میں مظلل کرنا ۵۹
تین نقطوں کی ایک سعت کسی دوسرے تین نقطوں میں مظلل ہو سکتی ہے ۶۳

پانچواں باب

چلیپی نسبتیں

تعریف ۶۷
چوبیس چلیپی نسبتیں چھ میں تحویل پذیر ہیں ۶۸
چلیپی نسبتوں کی ظلی خاصیت ۷۱
ہم رسم سعتیں اور پنسلیں باہم مظلل ہو سکتی ہیں ۷۷

چھٹا باب

منظرہ

تعریف ۸۲
سمتیں اور پنسلیں منظرہ میں ۸۴
ہم رسم سمتیں اور پنسلیں ۸۷
مثلثات منظرہ میں ۹۱

ساتواں باب

موسیقی تراش

موسیقی سمتوں کی تعریف اور خواص ۱۰۱
دائرہ کی موسیقی خاصیت قطب اور قطبی کی ۱۰۶
چار زاوئی اور ذو اربعۃ الاضلاع کی موسیقی خاصیت ۱۰۸

آٹھواں باب

درپیچ

درپیچ سمت کی تعریف اور جانچ ۱۱۵
درپیچ سمت مُظلل ہوسکتی ہے ۱۲۰
دائرہ کے درپیچ خواص ۱۲۲
قائم پنسل درپیچ میں ۱۲۴
ہر درپیچ پنسل میں علی القوائم شعاعوں کا زوج ہوتا ہے ۱۲۵

نواں باب

مخروطی تراشیں

تعریفات ۱۳۰

ماسکہ اور مرتب ۱۳۲
ظلی خواص ۱۳۳
دائرہ کی تظلیل دوسرے دائرہ میں ۱۳۴
ماسکہ اور مرتب کا قطب اور قطبی ہونا ۱۳۶
متوازی وتر ۱۳۸
ماسکہ اور مرتب کی خاصیت کا ثبوت ۱۴۰
(۱) مکافی ۱۴۱
(۲) ناقص ۱۴۶
(۳) زائد ۱۴۹
قطر اور معین ۱۵۴

دسواں باب

تمام مخروطیوں کے مشترک خواص

وتر اور مماس کا مرتب کے ساتھ تقاطع ۱۵۷
منحنی جو ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتا ہے ایک دائرہ کا ظل ہوتا ہے ۱۶۰
مماسوں کا زوج ۱۶۱
عماد ۱۶۴
وتر خاص ۱۶۵
کارنو کا مسئلہ ۱۶۹
نیوٹن کا مسئلہ ۱۷۰
چند اطلاقات ۱۷۲
دائرہ انحناء ۱۷۶
مخروطی جو چار زاوئی کے چار نقطوں میں سے گذرتا ہے ۱۷۷

گیارھواں باب

قطع مکافی

ابتدائی خواص ۱۸۴
مماس اور عماد ۱۸۶
مماسوں کا زوج ۱۹۰
مکافی جو ایک مثلث کے اضلاع کو مس کرتا ہے ۱۹۳
قطر ۱۹۹
دائرہ انحناء ۲۰۱

بارھواں باب

قطع ناقص

ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل ۲۱۲
مماس اور عماد ۲۱۳
مماسوں کا زوج ۲۲۰
مرتب دائرہ ۲۲۱
مزدوج قطر ۲۲۲
امدادی دائرہ ۲۲۵
مساوی مزدوج قطر ۲۲۹
دائرۂ انحناء ۲۳۲

تیرھواں باب

قطع زائد

منحنی کی شکل ۲۴۰
ماسکی فاصلوں کا فرق مستقل ۲۴۱
مماس اور عماد ۲۴۲
مزدوج محور کا طول ۲۴۵
مماسوں کا زوج ۲۴۶
مرتب دائرہ ... ۲۴۸
مزدوج قطع زائد ۲۴۹
متقاربی خواص ۲۵۱
مزدوج قطر ۲۵۵
دائرہ انحناء ۲۷۲

چودھواں باب

قائم زائد

مزدوج قطر ۲۷۹
عمودی قطر ۲۸۰
قائم زائد جو ایک مثلث کے گرد کھینچا جائے ۲۸۲
وتر اور مماس کے خواص ۲۸۵

پندرھواں باب

قائم تظلیل

اصول ۲۹۱
بنیادی مسئلے ۲۹۲
قطع ناقص ایک دائرہ کا قائم ظل ہوتا ہے ۲۹۶

سولھواں باب

مخروطیوں کے چلیپہ نسبتی خواص

ن (ا ب ج د) مستقل ۳۰۳
پیاسکال کا مسئلہ ۳۰۸
بریانکان کا مسئلہ ۳۱۰
چار نقطوں میں سے گذرنے والے مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق ۳۱۰
درپیچ پنسل مخروطی پر ۳۱۲

سترھواں باب

مکافات

اصول ۳۱۶
چار زاوئی اور چار ضلعی کے درپیچ خواص ۳۲۱
ڈیسارگ کا مسئلہ اور اس کا متکافی مسئلہ ۳۲۵
مکافات کا اطلاق مخروطیوں پر ۳۲۶
خاص صورت جبکہ اساسی مخروطی ایک دائرہ ہو ۳۳۳
ہم محور دائروں کی مکافات ہم ماسکی مخروطیوں ہیں ۳۳۵
خود مزدوج مثلثوں کا زوج ۳۳۷
متکافی مثلث ۳۳۹

اٹھارواں باب

دائری نقطے ۔ مخروطیوں کے ماسکے

دائری نقطوں کی تعریف ۳۴۴
تحلیلی نقطۂ نظر سے ۳۴۵
دائری نقطوں کے استعمال سے مخروطیوں کے خواص حاصل کرنا ۳۴۷
مخروطیوں کے چار ماسکے ۳۵۰
دو مثلث جو ایک مخروطی کے گرد کھینچے جائیں ۳۵۲
ظل کے ذریعہ تعمیم کرنا ۳۵۴

اُنیسواں باب

انقلاب

خط اور دائرہ کا انقلاب ۳۶۳
کرہ کا انقلاب ۳۶۶
مقلوب نقطوں کو مقلوب نقطوں میں مقلوب کرنا ۳۶۷
فویرباخ کا مسئلہ ۳۷۱

بیسواں باب

اشکال کی مشابہت

ہم وضع اشکال ۳۷۹
شکلیں جو راست مشابہ ہیں لیکن ہم وضع نہیں ہیں ۳۸۳
دو دائروں کے لیے مشابہت کا دائرہ ۳۸۵
بالعکس مشابہ اشکال ۳۸۵

متفرق مثالیں ۳۹۱
اشاریہ ۴۰۶

علم ہندسۂ نظری

پہلا باب

مثلث کے بعض خواص

۱۔ اصطلاحات کی تعریف۔

(ا) خطوں سے خطوط مستقیم مُراد ہوں گے اِلّا آنکہ اِس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔

(ب) وہ خطوط جو مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع کے وسطی نقطوں تک کھینچے جائیں مثلث کے خطوط وسطی کہلاتے ہیں۔

(ج) ایک مثلث کے حائط دائرہ سے مُراد وہ دائرہ ہے جو اس کے راسوں میں سے گذرتا ہے۔

اِس دائرہ کے مرکز کو ہم مثلث کا حائط مرکز کہینگے۔

طالب علم اِس سے واقف ہوگا کہ حائطہ مرکز اُن عمودوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے جو مثلث کے ضلعوں پر اِن کے نقاط وسطی میں سے کھینچے گئے ہوں۔

(د) ایک مثلث کا اندرونی دائرہ وہ دائرہ ہے جو مثلث کے ضلعوں کو مس کرے اور اس کے اندر واقع ہو۔

اِس دائرہ کے مرکز کو ہم اندرونی مرکز کہینگے۔

اندرونی مرکز اُن خطوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے جو مثلث کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

(ھ) ایک مثلث کا جانبی دائرہ وہ دائرہ ہے جو مثلث کے ایک ضلع کو اندر اور باقی دو ضلعوں کو خارج کرنے پر مس کرے۔ ہر مثلث کے تین جانبی دائرے ہوتے ہیں۔

جانبی دائرہ کے مرکز کو ہم جانبی مرکز کہینگے۔

جانبی مرکز ایک زاویہ کے ناصف اور دوسرے دو خارجی زاویوں کے ناصفوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے۔

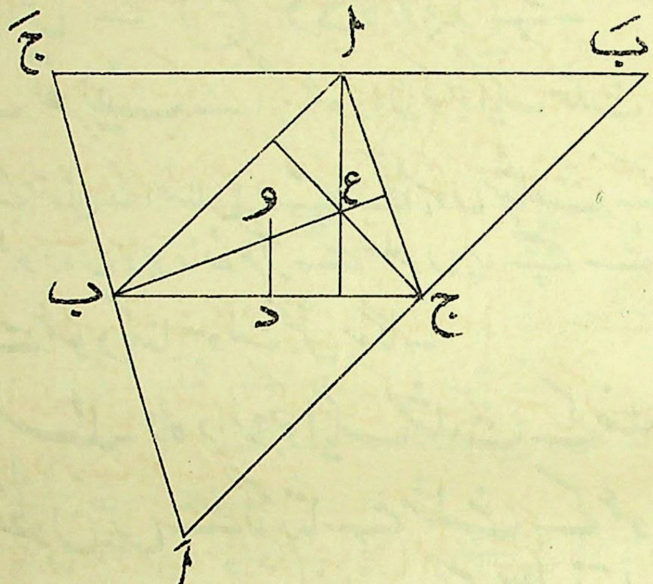
(و) دو مثلث جو ایسے ہوں کہ ایک کے ضلع اور زاویے علی الترتیب دوسرے کے ضلعوں اور زاویوں کے مساوی ہوں مماثل کہلائینگے۔

اگر ا ب ج، اَ بَ جَ کے مماثل ہو تو ہم اِس واقعہ کو ترقیم

△ ا ب ج ≡ △ اَ بَ جَ کے ذریعہ ظاہر کرینگے۔

۲۔ مسئلہ۔ ایک مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود ڈالے جائیں تو وہ ایک نقطہ پر جسکو مرکز عمودی کہتے ہیں ملتے ہیں اور مرکز عمودی سے ہر راس کا فاصلہ اُس عمودی فاصلہ کا

دوچند ہوتا ہے جو اِس رأس کے مقابل کے ضلع سے حائط مرکز کا ہے۔



مثلث ا ب ج کے راسوں میں سے مقابل کے اضلاع کے متوازی خطوط کھینچو۔ مثلث اَ بَ جَ جو اِس طور پر بنے گا مثلث ا ب ج کے مشابہ ہوگا اور اس کے خطی ابعاد ابتدائی مثلث کے خطی ابعاد سے دوچند ہوں گے۔

اس کے علاوہ نقاط ا، ب، ج چونکہ اَ بَ جَ کے ضلعوں کے وسطی نقطے ہیں اسلئے اِن نقطوں سے اُن ضلعوں پر کے عمود جن میں یہ نقطے واقع ہیں اَ بَ جَ کے حائط مرکز پر ملیں گے۔

لیکن یہ عمود مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر بھی عمود ہیں پس ہمارے مسئلہ کا پہلا جزو ثابت ہوگیا۔

(3) اب فرض کرو کہ ا ب ج کا مرکز عمودی ع ہے اور حائط مرکز و و د، ب ج پر عمود کھینچو۔

اب چونکہ مثلث اَ بَ جَ کا حائط مرکز بھی ع ہے اسلئے ع ا اور و د متشابہ مثلثوں اَ بَ جَ اور ا ب ج میں نظیری خطوط ہیں

اس لئے ا ع، و د کا دوچند ہے۔

۳ — **تعریف** — اُن عمودوں کو جو ایک مثلث کے راسوں سے اِن کے مقابل کے اضلاع پر کھینچے گئے ہوں مثلث کے عمود اور اُن عمودوں کو جو حائط مرکز سے ضلعوں پر کھینچے گئے ہوں حائط مرکز سے عمود کہنا سہولت بخش ہوگا۔

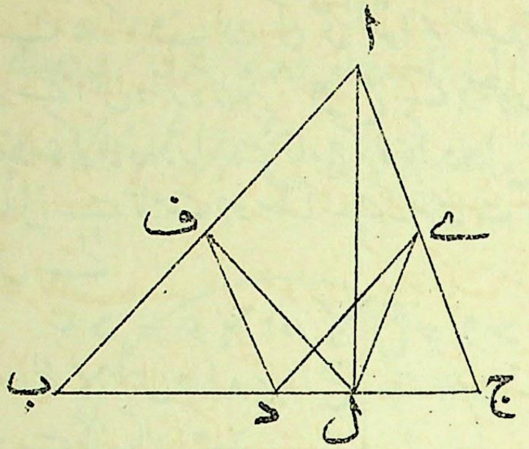
۴ — **مسئلہ** — وہ دائرہ جو ایک مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں میں سے گذرتا ہے مثلث کے عمودوں کے پائین میں سے اور اُن تین خطوں کے وسطی نقطوں میں سے بھی گذرتا ہے جو مرکز عمودی کو مثلث کے راسوں سے ملاتے ہیں۔

عمل — فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے وسطی نقطے د، ے، ف، اس کے عمودوں کے پائین ل، م، ن ہیں، حائط مرکز و ہے اور مرکز عمودی ع

ف د، د ے، ف ل، ل ے کو ملاؤ۔

اب چونکہ ا ل ج کا حائط مرکز ے ہے اس لئے

∠ ے ل ا = ∠ ے ا ل



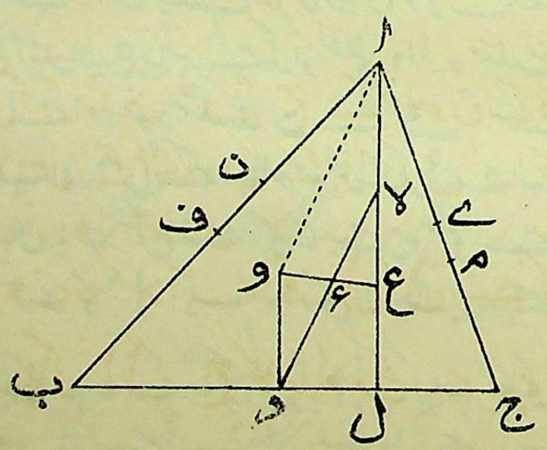
(4) اسی طرح

∠ ف ل ا = ∠ ف ا ل

∴ ∠ ف ل ے = ∠ ف ا ے

= ∠ ف د ے کیونکہ ا ف د ے متوازی الاضلاع ہے۔ اس لئے نقطہ ل مثلث د ے ف کے حائط دائرہ پر واقع ہے۔

اسی طرح م اور ن بھی اِس دائرہ پر واقع ہیں۔



نیز اس دائرہ کا مرکز ان تین خطوں میں سے ہر ایک پر واقع ہے

جو د ل، ے م، ف ن کی علی القوائم تنصیف کرتے ہیں۔

اس لئے اس دائرہ کا مرکز، و ع کے وسطی نقطہ ء پر ہے۔
اب د ء کو ملاؤ اور اسے خارج کرو تاکہ وہ ا ع سے لا پر ملے
یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلثات و ء د، ع ء لا مماثل ہیں، اس لئے

ء د = ء لا اور لا ع = و د

اس لئے لا اُس دائرہ پر واقع ہے جو د، ے، ف، ل، م، ن میں سے گذرتا ہے۔

اور چونکہ لا ع = و د = $\frac{1}{2}$ ا ع، اس لئے لا، ا ع کا وسطی نقطہ ہے۔

اسی طرح دائرہ، ما اور ے میں سے گذرتا ہے جو ب ع اور ج ع کے وسطی نقطے ہیں۔

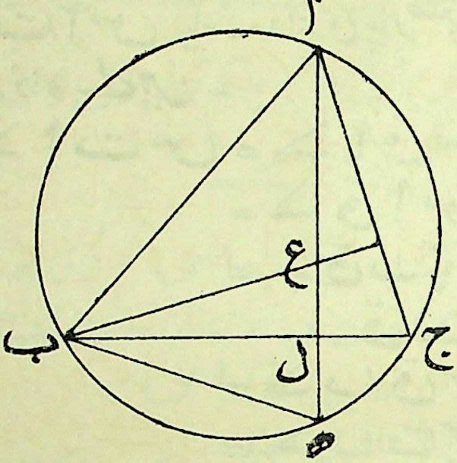
پس ہمارا مسئلہ ثابت ہو گیا۔

۵ — وہ دائرہ جس کی تعریف اوپر کی گئی ہے مثلث کا **نونقطی** دائرہ کہلاتا ہے۔ اسکا نصف قطر حائط دائرہ کے نصف قطر کا آدھا ہوتا ہے۔ یہ اس طرح ظاہر ہے کہ نونقطی دائرہ مثلث د ے ف کا حائط دائرہ ہے اور خود مثلث د ے ف، مثلث ا ب ج کے مشابہ ہے اور اس کے ابعاد موخر الذکر مثلث کے ابعاد کے نصف ہیں۔ یہی بات شکل سے بھی ثابت ہو سکتی ہے جس میں د لا = و ا کیونکہ و د لا ا ایک متوازی الاضلاع ہے۔ (5)

انقلاب کے بیان میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ نونقطی دائرہ مثلث کے اندرونی دائرہ کو اور تین جانبی دائروں کو مس کرتا ہے۔

۶ — مسئلہ — اگر ایک مثلث ا ب ج کے عمود

ا ل کو خارج کیا جائے اور وہ حائط دائرہ سے ھ میں ملے تو
ع ل = ل ھ جہاں ع مرکز عمودی ہے۔



ب ھ کو ملاؤ۔ تب
∠ ھ ب ل = ∠ ھ ا ج، ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہیں۔
= ∠ ل ب ع، کیونکہ ہر ایک زاویہ ا ج ب کا متمم ہے

پس مثلثات ع ب ل، ھ ب ل میں ب پر کے زاویے مساوی ہیں اور نیز ل پر اِن کے زاویے قائمہ ہیں اور ضلع ب ل مشترک ہے، اس لئے

ع ل = ل ھ

۷۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کے کسی نقطہ ق سے مثلث کے ضِلعوں پر عمود کھینچے جائیں

تو اِن کے پائین ہم خط ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ جس طرح شکل میں دیا گیا ہے اِن عمودوں کے پائیں ر، س، ت ہیں۔ ق ا اور ق ب کو ملاؤ۔

(6) ق ت ا س ایک دائری چار ضلعی ہے کیونکہ ت اور س قائمہ زاوئے ہیں۔

∴ ∠ ا ت س = ∠ ا ق س

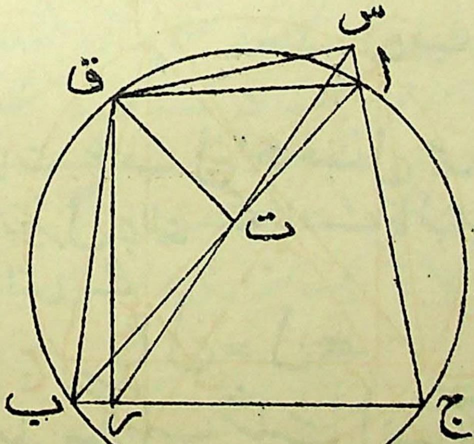
= ∠ ق ا س کا متمم

= ∠ ق ب ج کا متمم (کیونکہ ق ا ج ق ب ا ج متکملہ ہیں)

= ∠ ب ق ر

= ∠ ب ت ر (کیونکہ ق ب ر ت دائری ہے)

∴ ر ت س ایک خط مستقیم ہے۔



اس خط ر ات س کو ق کا خط پائین کہتے ہیں۔ یہ سمسن خط کے نام سے بھی مشہور ہے۔

اس مسئلہ کا عکس بھی درست ہے۔ یعنی

اگر ایک نقطہ ق سے ایک مثلث کے ضلعوں پر جو عمود ڈالے جائیں انکے پائین ہم خط ہوں تو ق مثلث کے حائط دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

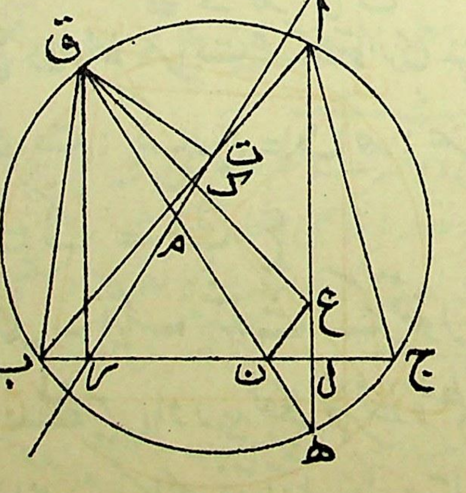
کیونکہ ق ب ر ات اور ق ت اس دائری ہونے کی وجہ سے

∠ ب ق ر = ∠ ب ت ر = ∠ ا ت س = ∠ ا ق س

∴ ∠ ق ب ر = ∠ ق اس

∴ ق ب ج ا دائری ہے۔

۸ — مسئلہ۔ ق کا خط پائین اس خط کی تنصیف کرتا ہے جو ق اور مرکز عمودی ع کو ملاتا ہے۔ (۶)



ق ع کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ ق کے خط پائین کو ک پر قطع کرتا ہے۔
فرض کرو کہ عمود ا ل حائط دائرہ سے ھ پر ملتا ہے۔
ق ھ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ خط خط پائین کو م پہ اور ب ج کو ن پہ قطع کرتا ہے۔

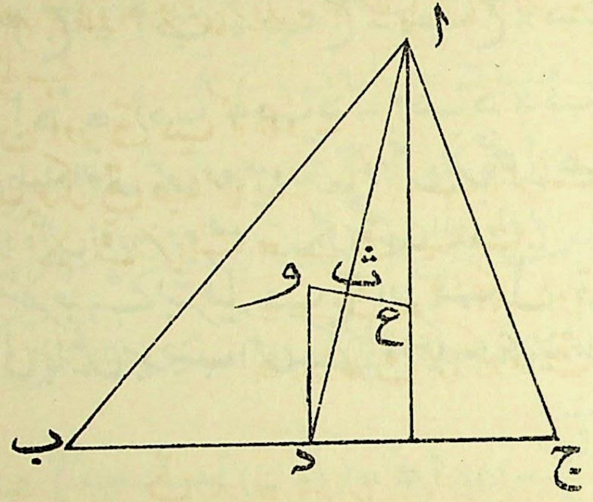
ع ن اور ق ب کو ملاؤ۔
اب چونکہ ق ب ر ت دائری ہے اس لئے
∠ ق ر ت = ∠ ق ب ت
= ∠ ق ھ ا، ایک ہی قطعہ دائرہ میں ہیں
= ∠ ھ ق ر کیونکہ ق ر، ا ھ کے متوازی ہے۔

∴ ق م = م ر
∴ نقطہ م خط ق ن کا نقطہ وسطی ہے۔
لیکن ∠ ع ن ل = ∠ ل ن ھ کیونکہ △ ع ن ل = △ ھ ن ل

= ∠ ر ن م
= ∠ م ر ن
∴ ع ن خط ر ت کے متوازی ہے
∴ ق ت : ک ع = ق م : م ت
∴ ق ک = ک ع

۹ ـ مسئلہ ـ ایک مثلث کے تینوں خطوط وسطی ایک نقطہ میں ملتے ہیں اور یہ نقطہ ہر خط وسطی کا نقطہ تثلیث ہوتا ہے اور نیز اس خط کا بھی نقطہ تثلیث ہوتا ہے جو حائط (8)

مرکز و اور مرکز عمودی ع کو ملاتا ہے۔



فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا خط وسطی ا د، و ع کو ث پر قطع کرتا ہے۔ اب چونکہ مثلث ث ا ع اور ث د و متشابہ ہیں اور ا ع = ۲ و د اس لئے ا ث = ۲ ث د اور ع ث = ۲ ث و۔

پس خط وسطی ا د، و ع کو ث پر قطع کرتا ہے جو دونوں خطوں کا نقطہ تثلیث ہے۔

اسی طرح دوسرے خطوط وسطی و ع کو اِسی نقطہ ث پر قطع کرتے ہیں اور یہ نقطہ اِنکا بھی نقطہ تثلیث ہے۔

اِس نقطہ ث کو ہم مثلث کا نقطہ وسطی کہینگے۔ طالب علم غالباً اس نقطہ سے مثلث کے مرکز ہندسی کے طور پر واقف ہوگا۔

۱۰ — مسئلہ — اگر مثلث ا ب ج کا ایک خط وسطی ا د ہو تو

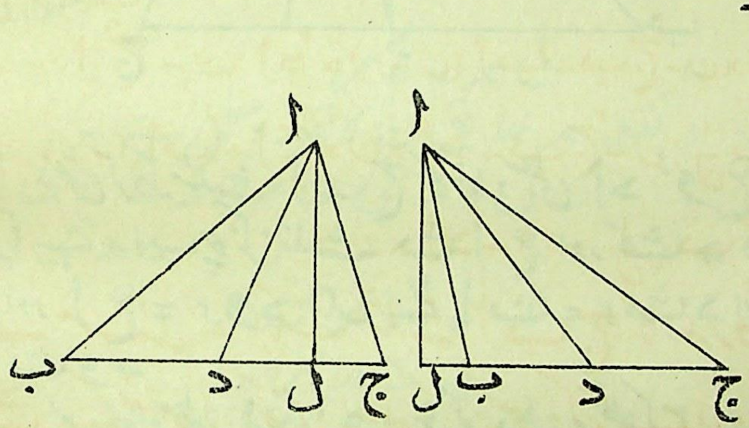
$$\text{اب}^{۲}+\text{اج}^{۲}=۲\,\text{اد}^{۲}+۲\,\text{بد}^{۲}$$

ال، ب ج پر عمود کھینچو - اب

$$\text{اج}^{۲}=\text{اب}^{۲}+\text{بج}^{۲}-۲\,\text{بج}\times\text{بل}$$

اور $$\text{اد}^{۲}=\text{اب}^{۲}+\text{بد}^{۲}-۲\,\text{بد}\times\text{بل}$$

(9) اِن مساواتوں میں وہ صورتیں داخل ہیں جنمیں ب اور ج دونوں زاوئے حادہ ہیں اور نیز وہ صورتیں بھی جنمیں اِن زاویوں میں سے ایک ہی مثلاً ب منفرجہ ہے بشرطیکہ ب ج اور ب ل کی علامتیں ایک یا مخالف لی جائیں بموجب اس کے کہ وہ ایک ہی یا مخالف سمتوں میں ہوں -



دوسری مساوات کو ۲ سے ضرب دو اور پہلی مساوات میں سے تفریق کرو تو

$$\text{اج}^{۲}-۲\,\text{اد}^{۲}=\text{بج}^{۲}-\text{اب}^{۲}-۲\,\text{بد}^{۲}$$

$$\therefore\ \text{اب}^{۲}+\text{اج}^{۲}=۲\,\text{اد}^{۲}+\text{بج}^{۲}-۲\,\text{بد}^{۲}$$

$$=۲\,\text{اد}^{۲}+۲\,\text{بد}^{۲}$$ کیونکہ $\text{بج}=۲\,\text{بد}$

۱۱- گزشتہ دفعہ میں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے وہ حسب ذیل عام مسئلہ کی صرف ایک خاص صورت ہے۔

اگر ایک مثلث ا ب ج کے ضلع ب ج میں د ایک ایسا نقطہ ہو کہ ب د = $\frac{۱}{ن}$ ب ج تو

(ن-۱) اب^{۲} + اج^{۲} = ن × اد^{۲} + (۱ - $\frac{۱}{ن}$) ب ج^{۲}

کیونکہ حسب سابق عمل کرنے اور دوسری مساوات کو ۲ کی بجائے ن سے ضرب دیکر پہلی مساوات میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

اج^{۲} - ن × اد^{۲} = (۱ - ن) اب^{۲} + ب ج^{۲} - ن × ب د^{۲}

∴ (ن-۱) اب^{۲} + اج^{۲} = ن × اد^{۲} + ب ج^{۲} - ن ($\frac{۱}{ن}$ ب ج)^{۲}

= ن × اد^{۲} + (۱ - $\frac{۱}{ن}$) ب ج^{۲}

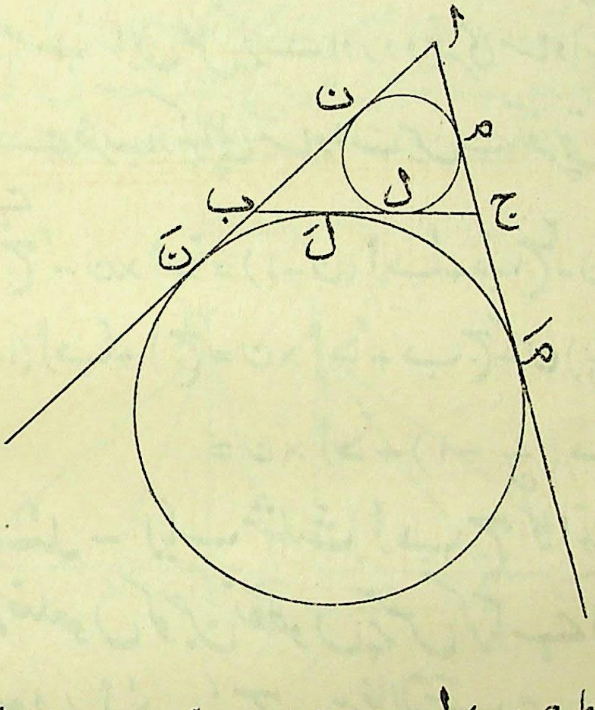
۱۲- مسئلہ- ایک مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ مثلث کے ضلعوں کو جن نقطوں پر مس کرتا ہے اُن کے فاصلے رائسوں ا، ب، ج سے علی الترتیب س-ا، س-ب، س-ج ہوتے ہیں اور ا کے مقابل کے جانبی دائرے کے نقاط تماس کے فاصلے س، س-ج، س-ب ہوتے ہیں جہاں ا، ب، ج اُن ضلعوں کے طول ہیں جو علی الترتیب ا، ب، ج کے مقابل ہیں اور س اِن طولوں کے مجموعہ کا (10)

نصف ہے۔

فرض کرو کہ اندرونی دائرہ کے نقاط تماس ل، م، ن ہیں۔ اب چونکہ ام = ان، ج ل = ج م اور ب ل = ب ن اسلئے

ام + ب ج = اضلاع کے مجموعہ کا نصف = س

∴ ام = س - ا



اسی طرح ب ل = ب ن = س - ب اور ج ل = ج م = س - ج

اس کے بعد فرض کرو کہ ا کے مقابل جو جانبی دائرہ بنتا ہے اسکے نقاط تماس لَ، مَ، نَ ہیں۔ تب

انَ = اب + ب نَ = اب + ب لَ

اور امَ = اج + ج مَ = اج + ج لَ

اور چونکہ امَ = انَ

اس لئے ۲ انَ = اب + اج + ب ج = ۲ س

∴ انَ = س

نیز ب لَ = ب نَ = س - ج اور ج لَ = ج مہ = س - ب

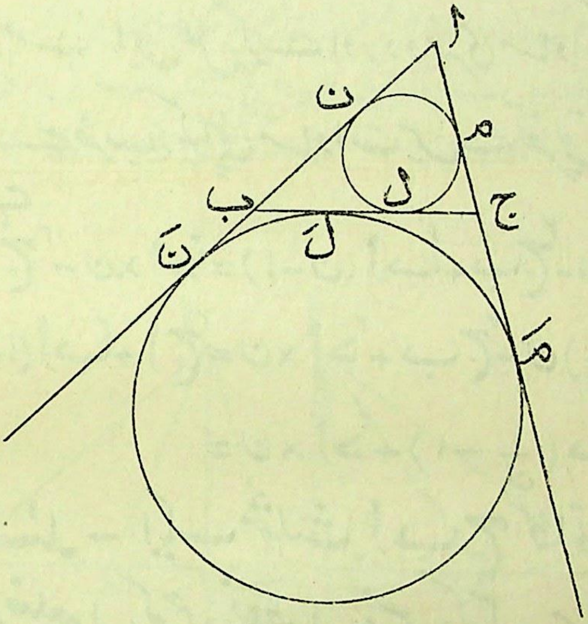
نتیجہ صریح - ب لَ = ج ل اور اس لئے ل لَ اور ب ج کا نقطہ وسطی وہی ہے۔

نصف ہے۔

فرض کرو کہ اندرونی دائرہ کے نقاط تماس ل، م، ن ہیں۔ اب چونکہ ام = ان، ج ل = ج م اور ب ل = ب ن اسلئے

ام + ب ج = اضلاع کے مجموعہ کا نصف = س

∴ ام = س - ا



اسی طرح ب ل = ب ن = س - ب اور ج ل = ج م = س - ج

اس کے بعد فرض کرو کہ ا کے مقابل جو جانبی دائرہ بنتا ہے اسکے نقاط تماس لَ، مَ، نَ ہیں۔ تب

انَ = اب + ب نَ = اب + ب لَ

اور امَ = اج + ج مَ = اج + ج لَ

اور چونکہ امَ = انَ

اس لئے ۲ انَ = اب + اج + ب ج = ۲ س

∴ انَ = س

نیز ب لَ = ب نَ = س - ج اور ج لَ = ج مَ = س - ب

نتیجہ صریح - ب لَ = ج ل اور اس لئے ل لَ اور ب ج کا نقطہ وسطی وہی ہے۔

مشقیں

(11)

۱ — اُس مثلث کو جو ایک مثلث کے عمودوں کے پایوں کو ملانے سے بنے مثلث پائیں کہا جائے تو ثابت کرو کہ مثلث پائیں کا اندرونی مرکز ابتدائی مثلث کا مرکز عمودی ہوتا ہے اور اس کے زاویے ابتدائی مثلث کے دُگنے زاویوں کے تکملے ہوتے ہیں۔

۲ — ایک خط مستقیم ف ق جو اب کے متوازی کھینچا گیا ہے مثلث اب ج کے حائط دائرہ کو نقطوں ف اور ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف اور ق کے خطوط پائیں ایک دوسرے کو اس عمود پر قطع کرتے ہیں جو ج سے اب پر کھینچا گیا ہے۔

۳ — ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط دائرہ پر کے تین نقطوں کے خطوط پائین سے جو مثلث بنتا ہے وہ ان تین نقطوں کو ملانے والے مثلث کے متشابہ ہوتا ہے۔

۴ — ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط دائرہ کے کسی وتر کے سروں کے خطوط پائین ایک مستقل زاویہ پر متقاطع ہوتے ہیں۔ اس وتر کے وسطی نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۵ — اگر ایک مثلث کا حائط دائرہ اور اس کے دو راس دئے گئے ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث کے مرکز عمودی، مرکز مہندسی اور نو نقطی مرکز کے طریق دائرے ہیں۔

۶ — دو دئے ہوئے نقطوں سے ایک نقطہ کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اِس نقطہ کا طریق ایک کرہ ہے۔

۷ — ایک مثلث اب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، اب پر علی الترتیب تین نقطے اَ، بَ، جَ ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثات

اَبَ جَ، بَ جَ اَ، جَ اَبَ کے حائط مرکزوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے وہ اب ج کے متشابہ ہے۔

۸ — ایک دائرہ مثلث اب ج کے حائط دائرہ کے ہم مرکز کھینچا گیا ہے اور وہ مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، اب پر علی الترتیب مقطوعے $ا_1 ا_2$، $ب_1 ب_2$، $ج_1 ج_2$ کاٹتا ہے۔ $ا_1$ سے ج ا، اب پر علی الترتیب عمود $ا_1 ب'_1$، $ا_1 ج'_1$ کھینچے گئے ہیں اور علی ہذا $ا_2 ب'$، $ب_2 ج'$، $ج_1 ج'_2$ سے۔ ثابت کرو کہ مثلث $ا ب_1 ج_1$ جیسے چھ مثلثوں کے حائط مرکز ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جو نو نقطی دائرہ کے ہم مرکز ہے اور جسکا نصف قطر ابتدائی دائرہ کے نصف قطر کا آدھا ہے۔

۹ — ایک مستوی چار ضلعی کو اس کے اندرونی وتروں سے چار مثلثوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ چار ضلعی جن کے راس ان مثلثوں کے (۱) مرکز عمودی اور (۲) حائط مرکز ہیں متشابہ متوازی الاضلاع (12)
ہیں اور اگر ان متوازی الاضلاع شکلوں کے رقبے $ق_1$ اور $ق_2$ ہوں اور ابتدائی چار ضلعی کا رقبہ ق ہو تو ثابت کرو کہ $۲ ق + ق_1 = ۴ ق_2$۔

۱۰ — ایک خط ایک مثلث کے راس کو اندرونی دائرہ کے اُس نقطہ سے ملاتا ہے جو قاعدہ سے بعید ترین ہے، ثابت کرو کہ یہ خط جانبی دائرہ اور قاعدہ کے نقطہ تماس میں سے بھی گذرتا ہے۔

۱۱ — اگر مقدار اور محل میں وہ خطوط دیے جائیں جو ایک مثلث کے راس کو اُن نقطوں سے ملاتے ہیں جن پر اندرونی دائرہ اور قاعدہ کا جانبی دائرہ قاعدہ کو مس کرتے ہیں تو مثلث کو بناؤ۔

۱۲ — ثابت کرو کہ جب چار نقطے ا، ب، ج، د ایک دائرہ پر واقع ہوں تو مثلثات ب ج د، ج د ا، د اب، اب ج کے عمودی مرکز ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جس کا نصف قطر ابتدائی دائرہ کے

نصف قطر کے مساوی ہے۔

۱۳ - ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط دائرہ کے ایک قطر کے سروں کے خطوط پائین نو نقطی دائرہ پر علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔

۱۴ - ا ب ج ایک مثلث ہے اور و اس کا حائط مرکز۔ و د جو ب ج پر عمود ہے حائط دائرہ سے ک پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو د میں سے گذرتا ہے اور ا ک پر عمود ہے ک ع کی تنصیف کریگا جہاں ع مرکز عمودی ہے۔

۱۵ - اگر ایک مثلث کا حائط دائرہ اور اسکا ایک راس اور نیز ان خطوں کے طول دئے گئے ہوں جو دئے ہوئے راس کو مرکز عمودی اور مرکز ہندسی سے ملاتے ہیں تو مثلث بناؤ۔

۱۶ - اگر ا ب کو و پر اس طرح تقسیم کیا جائے کہ

$$\text{ل} \times \text{او} = \text{م} \times \text{وب}$$

اور اگر ف کوئی نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ل} \times \text{اف}^{2} + \text{م} \times \text{بف}^{2} = (\text{ل} + \text{م})\,\text{وف}^{2} + \text{ل} \times \text{او}^{2} + \text{م} \times \text{بو}^{2}$$

اگر ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے طول ا، ب، ج ہوں اور ایک نقطہ ف ایسا ہو کہ $\text{ا} \times \text{فا}^{2} + \text{ب} \times \text{فب}^{2} + \text{ج} \times \text{فج}^{2}$ مستقل ہو تو نقطہ ف کا طریق معلوم کرو۔

دوسرا باب

دائروں کے بعض خواص

۱۳ — **تعریف** ۔ اگر دو نقطے ف اور فَ ایک دائرہ کے ایک ہی نصف قطر پر اور دائرہ کے مرکز و کی ایک ہی جانب واقع ہوں اور اگر و سے اِن کے فاصلے ایسے ہوں کہ

وف × وفَ = دائرہ کے نصف قطر کا مربع

تو اِن نقطوں کو دائرہ کے لحاظ سے **مقلوب نقطے** کہا جاتا ہے۔

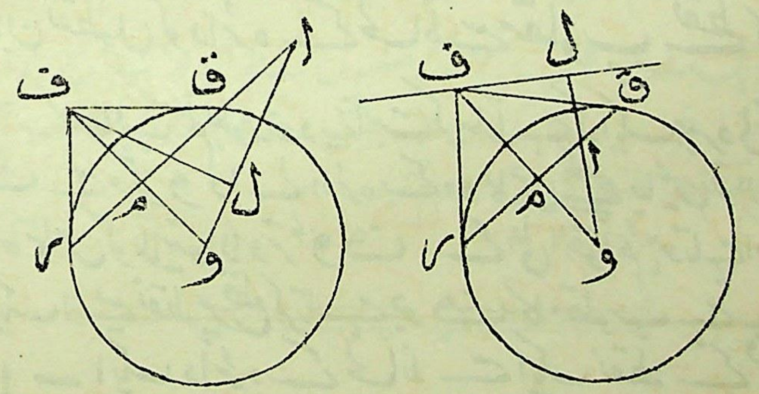
طالب علم بطور خود یہ ثابت کر سکتا ہے کہ ایک بیرونی نقطے ف سے مرکز و والے دائرہ کے دو مماس کھینچے جائیں تو اِن مماسوں کے نقاط تماس کو ملانیوالا وتر وف کے علی القوائم ہوتا ہے اور وف کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتا ہے جو ف کا مقلوب ہے۔

۱۴ — ایک دائرہ کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی کی تعریف حسب ذیل مسئلہ سے معلوم ہوگی۔

مسئلہ ۔ ایک دائرہ کے ایسے وتر کھینچے گئے ہیں جو ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ اِن وتروں کے

سروں پر مماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں۔ ان زوجوں کے نقاط تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جسے اس ثابت نقطہ کا قطبی خط کہتے ہیں اور اس ثابت نقطہ کو اس خط کا قطب کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے اور اسکے مستوی میں ایک ثابت نقطہ ا ہے۔
اس دائرہ کا کوئی وتر ق ر کھینچو جو ا میں سے گذرے۔
فرض کرو کہ ق اور ر پر کے مماس ف پر ملتے ہیں۔
ف ل، و ا پر عمود کھینچو۔
فرض کرو کہ و ف، ق ر کو نقطہ م پر علی القوائم قطع کرتا ہے۔
تب ف م ل ا دائری ہے۔ (14)
∴ و ل × و ا = و م × و ف = نصف قطر کا مربع
∴ ل ایک ثابت نقطہ ہے یعنے ا کا مقلوب۔



پس ف کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو و ا پر عمود ہے اور اس کو ا کے مقلوب نقطہ میں قطع کرتا ہے۔

२२८९८

९४/९

7/12

۱۵ — گذشتہ دفعہ سے یہ واضح ہے کہ کسی بیرونی نقطہ کا قطبی، دائرہ کے اُس وتر پر منطبق ہوتا ہے جو اس نقطہ سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاط تماس کو ملاتا ہے۔ اس وتر کو وترتماس کہتے ہیں۔ اگر ہم خیالی خطوں کے اُس تصور کو بھی اپنی بحث میں داخل کریں جو ہندسہ تحلیلی میں اختیار کیا جاتا ہے تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کسی نقطہ کا قطبی اِس نقطہ سے کھینچے ہوئے حقیقی یا خیالی مماسوں کے وترتماس پر منطبق ہوتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ کا قطبی اس نقطہ پر کا مماس ہوتا ہے۔

بعض مصنفین کسی نقطہ کے قطبی کی یہ تعریف کرتے ہیں کہ وہ اس نقطہ سے کھینچے ہوئے مماسوں کا وترتماس ہے، اور دوسرے اس کی موسیقی خاصیت کے ذریعہ جو کسی آیندہ باب میں بیان کی جائے گی اس کی تعریف کرتے ہیں۔ یہ بدقسمتی ہے کہ ایسا اختلاف پایا جاتا ہے۔ لیکن اِس کتاب کے مصنف کی نظر میں وہ طریقہ جو یہاں اختیار کیا گیا ہے بہترین ہے۔

۱۶ — مسئلہ۔ اگر ا کا قطبی، ب میں سے گذرے تو ب کا قطبی، ا میں سے گذرے گا۔

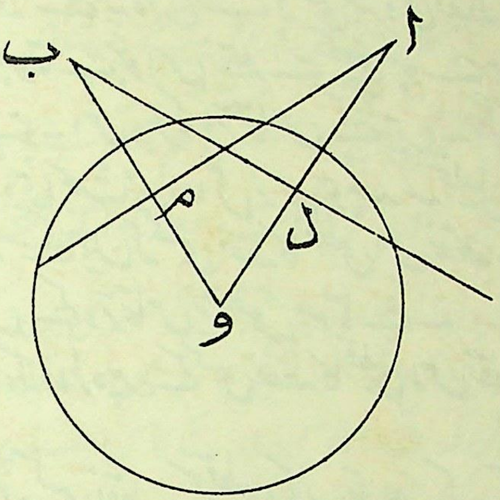
(15) فرض کرو کہ ا کا قطبی ب ل ہے جو و ا کو ل پر علی القوائم قطع کرتا ہے۔ ا م، و ب کے علی القوائم کھینچو۔ تب

وم × وب = ول × وا = نصف قطر کا مربع

∴ خط ا م نقطہ ب کا قطبی ہے۔

یعنے نقطہ ا نقطہ ب کے قطبی پر واقع ہوتا ہے۔

पुस्तकालय
गुरुकुल कांगड़ी



وہ دو نقطے جنمیں سے ہر ایک کا قطبی دوسرے کے قطبی میں سے گذرتا ہے مزدوج نقطے کہلاتے ہیں۔

طالب علم بطور خود یہ دیکھ سکتا ہے کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے منقلوب نقطے مزدوج نقطوں کی ایک خاص صورت ہیں۔

طالب علم بطور مشق یہ ثابت کرے کہ اگر ل، م دو ایسے خط ہوں کہ ل کا قطب م پر واقع ہے تو م کا قطب ل پر واقع ہوگا۔

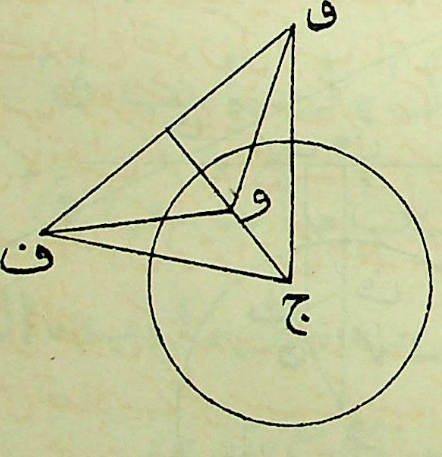
ایسے دو خطوں کو مزدوج خط کہتے ہیں۔

مزدوج نقطوں کی مندرجہ بالا خاصیت سے یہ ظاہر ہے کہ ہم خط نقطوں کی کسی تعداد کے قطبی سب کے سب ایک مشترک نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ یعنی اُس خط کے قطب میں سے جس پر وہ واقع ہیں۔ کیونکہ اگر ایک خط ف پر جسکا قطب ق ہے ا، ب، ج، وغیرہ مختلف نقطے لئے جائیں تو چونکہ ق کا قطبی ا، ب، ج، وغیرہ میں سے گذرتا ہے اس لئے ا، ب، ج، وغیرہ کے قطبی ق میں سے گذرینگے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ دو نقطوں کے قطبیوں کا نقطہ تقاطع اُس خط کا قطب

ہوتا ہے جو انہیں ملاتا ہے۔

(16) **۱۶۔ مسئلہ۔ اگر و ف اور و ق ایک دائرہ کے مزدوج خطوں کا جو و کے قطبی سے ف اور ق پر ملتے ہیں ایک زوج ہو تو مثلث و ف ق ایسا ہو گا کہ اس کا ہر راس مقابل کے ضلع کا قطب ہو گا اور دائرہ کا مرکز مثلث کا مرکز عمودی ہو گا۔**

کیونکہ و ق کا قطب، و کے قطبی پر واقع ہونا چاہئے، اور نیز وہ و ف پر بھی واقع ہوتا ہے کیونکہ و ف اور و ق مزدوج خط ہیں۔ اس لئے و ق ف کا قطبی ہے۔ اسی طرح و ف، ق کا قطبی ہے۔



نیز وہ خطوط جو و، ف، ق کو ج سے ملاتے ہیں علی الترتیب ان نقطوں کے قطبیوں پر عمود ہیں اور اس لئے ج، مثلث کا مرکز عمودی ہے۔

۱۷۔ مسئلہ۔ اگر ایک دائرہ (مرکز و) کے

مستوی میں ف اور ق کوئی دو نقطے ہوں تو وف : وق
= ف سے ق کے قطبی پر عمود : ق سے ف کے قطبی پر عمود
فرض کرو کہ ف اور ق کے مقلوب نقطے فَ اور قَ ہیں
جنمیں سے ف اور ق کے قطبی گذرتے ہیں۔

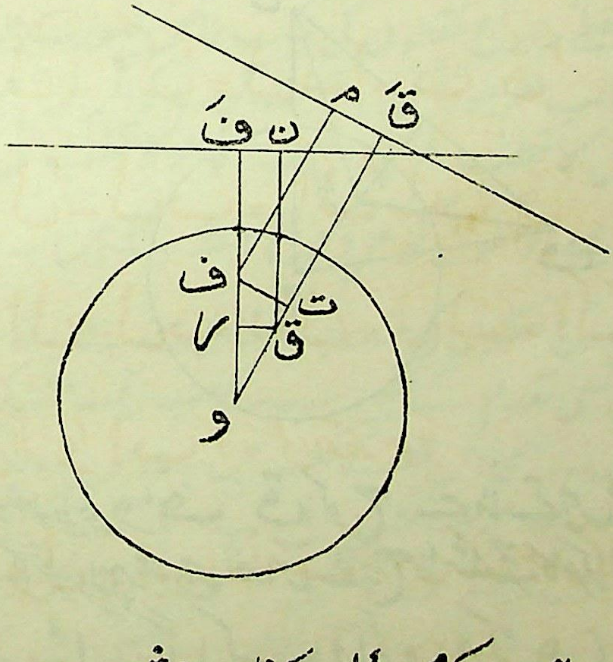
فرض کرو کہ قطبیوں پر عمود فم اور قن ہیں۔ فت
اور قر علی الترتیب وقَ اور وفَ پر عمود کھینچو۔ تب

وقَ × وق = وفَ × وف

کیونکہ ہر ایک حاصل ضرب نصف قطر کا مربع ہے۔ نیز
ور × وف = وت × وق کیونکہ فرقت دائری ہے

$$\therefore\ \frac{\text{وقَ}}{\text{وفَ}} = \frac{\text{وف}}{\text{وق}} = \frac{\text{وت}}{\text{ور}} = \frac{\text{وقَ} - \text{وت}}{\text{وفَ} - \text{ور}} = \frac{\text{فم}}{\text{قن}}$$

پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔ (17)



یہ مسئلہ سامن کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے۔

۱۸ — مسئلہ۔ اُن نقطوں کا طریق جن سے دو دیئے ہوئے ہم مستوی دائروں کے مماس مساوی ہوں ایک خط ہوتا ہے جو مرکزوں کے ملانے والے خط پر عمود ہوتا ہے۔

اس خط کو دائروں کا بنیادی محور کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف ک، ف ق دو دائروں کے مساوی مماس ہیں اور دائروں کے مرکز ا اور ب ہیں۔

ف ل، اب پر عمود کھینچو۔ ف ا، ف ب، اک اور ب ق کو ملاؤ۔ اب

فک^۲ = اف^۲ - اک^۲ = فل^۲ + ال^۲ - اک^۲

اور فق^۲ = فب^۲ - بق^۲ = فل^۲ + لب^۲ - بق^۲

∴ ال^۲ - اک^۲ = لب^۲ - بق^۲

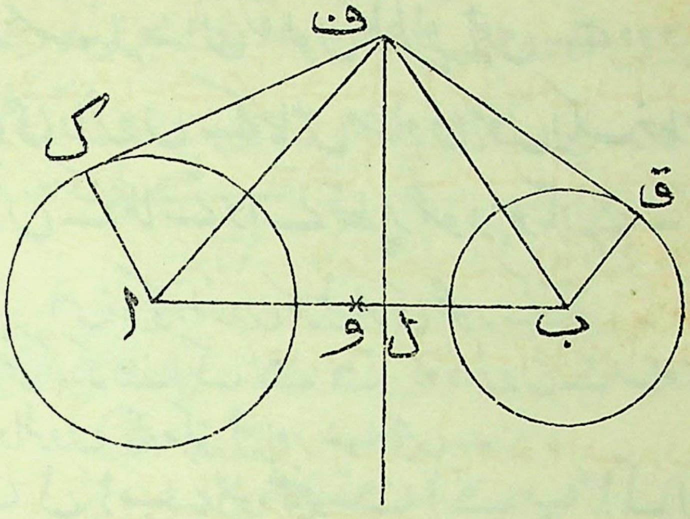
∴ ال^۲ - لب^۲ = اک^۲ - بق^۲

∴ (ال - لب)(ال + لب) = اک^۲ - بق^۲

پس اگر و، اب کا وسطی نقطہ ہو تو

۲ ول × اب = نصف قطروں کے مربعوں کا فرق

∴ ل ایک ثابت نقطہ ہے اور ف کا طریق ایک خط ہے جو اب پر عمود ہے۔



(18)

اگر دیئے ہوئے دو دائرے ایک دوسرے کو قطع کریں تو چونکہ ان کے محدودہ وتر مشترک پر کے نقطوں سے دائروں کے مماس مساوی ہوتے ہیں اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ دو متقاطع دائروں کا بنیادی محور ان کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے ۔ اور اگر خیالی نقطوں کے تصور کو بھی داخل کیا جائے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ دو دائروں کا بنیادی محور ان کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے خواہ یہ نقطے حقیقی ہوں یا خیالی ۔

۱۹ — دو ہم مستوی دائروں کے مستوی میں کسی نقطہ ف سے ان دائروں کے مماسوں کے مربعوں کا فرق ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو ف سے دائروں کے بنیادی محور پر کھینچا گیا ہے

فرض کرو کہ ف سے دائروں کے مماس ف ق اور ف ک ہیں اور دائروں کے مرکز ا اور ب ہیں ۔

فرض کرو کہ بنیادی محور ن ل پر عمود ف ن ہے اور اب پر ف م ۔ فرض کرو کہ اب کا وسطی نقطہ و ہے ۔ ف ا، ف ب کو

ملاؤ - اب

ف ق^2 - ف ر^2 = ف ا^2 - ا ق^2 - (ف ب^2 - ب ر^2)

= ف ا^2 - ف ب^2 - ا ق^2 + ب ر^2

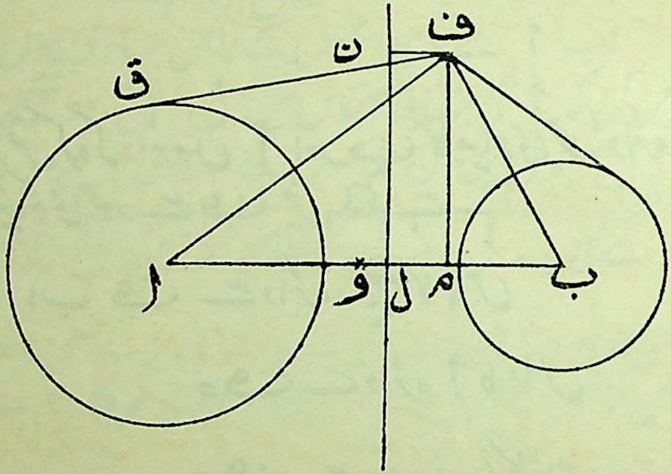
= ا م^2 - م ب^2 - ا ق^2 + ب ر^2

= ۲ و م × اب - ۲ و ل × اب (دیکھو دفعہ ۱۸)

= ۲ اب × ل م = ۲ اب × ن ف

اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

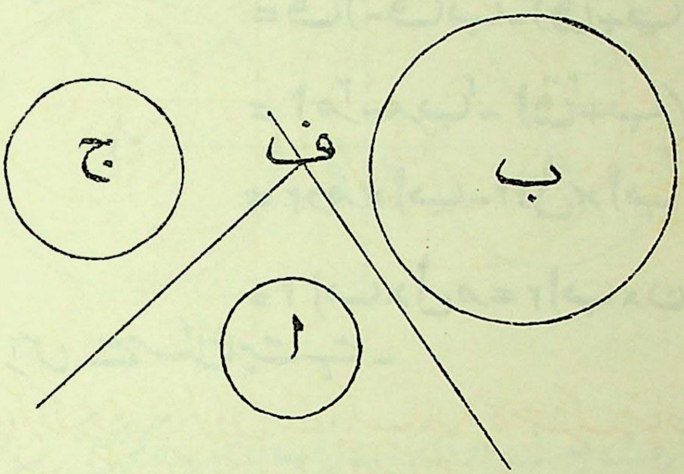
(19)



بعض مصنفین ایک نقطہ سے دائرہ کے مماس کے مربع کے لئے اصطلاح ”نقطہ کی طاقت“ بلحاظ دائرہ بھی استعمال کرتے ہیں۔

۲۰ - مسئلہ - تین ہم مستوی دائروں کے بنیادی محور

جبکہ دائروں کو دو دو کرکے لیا جائے ایک نقطے میں ملتے ہیں



فرض کرو کہ دائروں ا اور ب کا بنیادی محور، دائروں ا اور ج کے بنیادی محور سے ف میں ملتا ہے۔

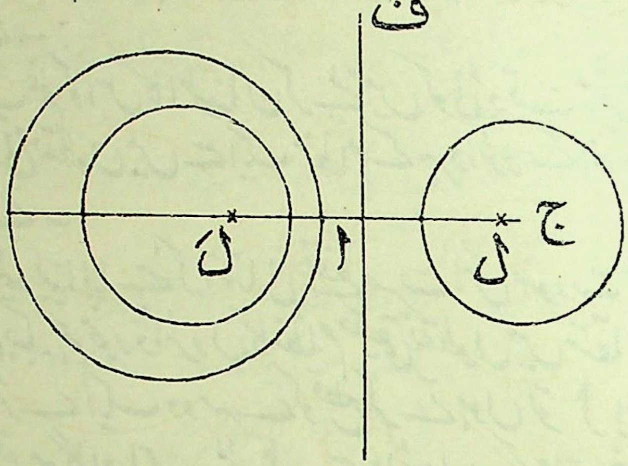
اب ف سے دائرہ ج کا مماس (20)

= ف سے دائرہ ا کا مماس

= ف سے دائرہ ب کا مماس

∴ نقطہ ف دائروں ب اور ج کے بنیادی محور پر ہے۔

۲۱ — ہم محور دائرے۔ ہم مستوی دائروں کا ایسا نظام کہ انمیں سے کسی زوج کا بنیادی محور وہی ہو ہم محور نظام کہلاتا ہے۔ صریحًا ایسے دائروں کے مرکز ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہونگے۔



فرض کرو کہ ہم محور دائروں کے ایک نظام کا مشترک بنیادی محور ان کے مرکزوں کے خط کو نقطہ ا پر قطع کرتا ہے۔

اب ا سے تمام دائروں کے مماس مساوی ہوں گے۔

فرض کرو کہ ا کی متقابلہ سمتوں میں ل ، لَ دو نقطے ہیں ایسے کہ ال ، الَ طول میں ان مماسوں کے مساوی ہیں جو ا سے دائروں کے کھینچے گئے ہیں۔ ل اور لَ کو نظام کے انتہائی نقطے کہتے ہیں

یہ نقطے ایسے ہوتے ہیں کہ ان سے بنیادی محور پر کے کسی نقطہ ف کا فاصلہ اُس مماس کے طول کے مساوی ہوتا ہے جو ف سے نظام کے کسی دائرہ تک کھینچا گیا ہو۔

کیونکہ اگر دائروں میں سے ایک کا مرکز ج ہو اور نصف قطر (21)
ر تو

$$\text{فلَ}^2 = \text{فا}^2 + \text{الَ}^2 = \text{فا}^2 + \text{اج}^2 - \text{ر}^2 = \text{فج}^2 - \text{ر}^2$$

= ف سے دائرہ ج کے مماس کا مربع

یہ دو نقطے ل اور لَ لا انتہا چھوٹے نصف قطر کے دائروں کے

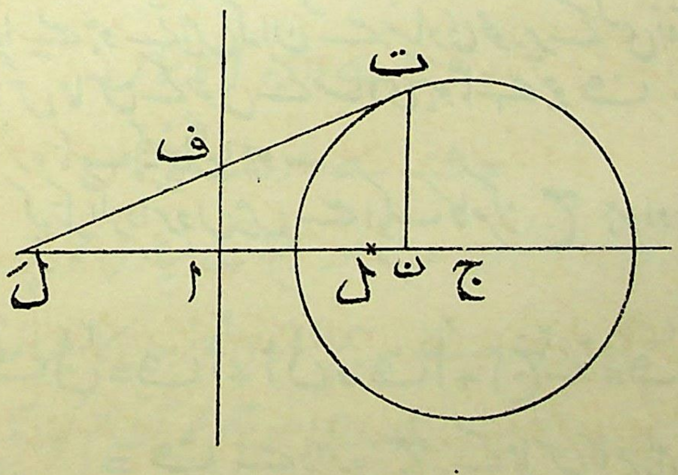
مرکز سمجھے جا سکتے ہیں ۔ انہیں بعض اوقات نظام کے نقطہ دائرے کہا جاتا ہے ۔

طالب علم کو اِس کا اطمینان کر لینے میں کوئی دِقت پیش نہیں آئیگی ک اِن دو انتہائی نقطوں میں سے ایک نظام کے ہر دائرہ کے اندر اور دوسرا باہر ہوتا ہے ۔

یہ دیکھ لینا چاہیے کہ انتہائی نقطے صرف اُس صورت میں حقیقی ہوتے ہیں جبکہ ہم محور دائروں کا نظام حقیقی نقطوں میں متقاطع نہ ہو کیونکہ اگر دائرے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں تو ا اِن دائروں کے اندر واقع ہوگا اور اس لئے ا سے دائروں کے مماس خیالی ہونگے ۔

نیز یاد رہے کہ اگر ہم محور نظام کے دو دائرے نقطوں ف اور ق میں متقاطع ہوں تو اس نظام کے سب دائرے ف اور ق میں سے گذرینگے ۔

۲۲ ۔ ہم محور دائروں کے کسی نظام کے انتہائی نقطے اس نظام کے ہر دائرہ کے لحاظ سے مقلوب نقطے ہوتے ہیں ۔



فرض کرو کہ نظام کے کسی ایک دائرہ کا مرکز ج ہے۔ فرض کرو کہ اِس نظام کے انتہائی نقطے ل اور لَ ہیں جن میں لَ، دائرہ ج کے باہر واقع ہے۔

دائرہ ج کا مماس لَ ت کھینچو۔ یہ مماس بنیادی محور سے نقطہ ف پر تنصیف ہوگا۔ (22)

ت ن، مرکزوں کے خط پر عمود کھینچو۔ اب

لَ ا : ا ن = لَ ف : ف ت

∴ لَ ا = ا ن

∴ ن، ل پر منطبق ہوتا ہے۔

پس لَ سے کھینچے ہوئے مماسوں کا وتر تماس مرکزوں کے خط کو علی القوائم ل میں قطع کرتا ہے۔

اس لئے ل اور لَ مقلوب نقطے ہیں۔

۲۳ — طالب علم حسب ذیل دو مسئلے بہت آسانی سے ثابت کر سکتا ہے۔

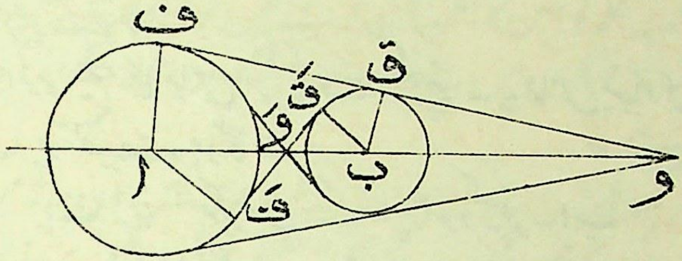
ہر دائرہ جو انتہائی نقطوں میں سے گزرتا ہے نظام کے تمام دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

کسی ہم محور نظام کے دو دائروں کے مشترک مماس کے محاذی کسی ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔

۲۴ — دو دائروں کے مشترک مماس۔

بالعموم دو ہم مستوی دائروں کے چار مشترک مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ ان چار مماسوں میں سے دو، مرکزوں کے خط کو خارجاً قطع کریں گے، انہیں راست مشترک مماس کہا جاتا ہے۔ باقی دو مماس مرکزوں کے

خط کو داخلاً قطع کرینگے، انہیں قاطع مشترک مماس کہتے ہیں۔



اب ہم ثابت کرینگے کہ دو دائروں کے مشترک مماس مرکزوں کے خط کو دو نقطوں پر قطع کرتے ہیں جو اس خط کو داخلاً اور خارجاً نصف قطروں کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک راست مشترک مماس ف ق مرکزوں ا اور ب کو ملانیوالے خط کو و پر قطع کرتا ہے۔ ا ف، ب ق کو ملاؤ۔

اب چونکہ ف اور ق قائمہ زاویے ہیں اس لئے مثلثات (23)

ا ف و، ب ق و متشابہ ہیں اور اس لئے

ا و : ب و = ا ف : ب ق

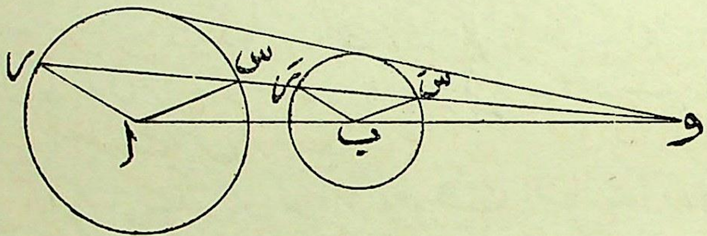
اسی طرح اگر فَ قَ ایک قاطع مشترک مماس ہو جو ا ب کو وَ پر قطع کرتا ہے تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ا وَ : وَ ب = نصف قطروں کی نسبت۔

اس طرح ہمیں مشترک مماسوں کو کھینچنے کا ایک سادہ عمل ملتا ہے یعنے ا ب کو داخلاً اور خارجاً وَ اور و پر نصف قطروں کی نسبت میں تقسیم کرو اور پھر و اور وَ سے کسی ایک دائرہ کا مماس کھینچو، یہ مماس دوسرے دائرہ کا بھی مماس ہوگا۔

اگر دائرے حقیقی نقطوں میں متقاطع ہوں تو و سے کھینچے ہوئے مماس خیالی ہونگے ۔

اگر ایک دائرہ دوسرے کے بالکل اندر واقع ہو تو و اور وَ دونوں سے کھینچے ہوئے مماس خیالی ہونگے ۔

۲۵ ـــ فرض کرو کہ نقطہ و سے جس کی تعریف گذشتہ دفعہ میں کیگئی ہے ایک خط کھینچا گیا ہے جو دائروں کو ر س اور رَ سَ میں قطع کرتا ہے (دیکھو ذیل کی شکل)



مثلثات و ا ر ، و ب رَ پر غور کرو تو حاصل ہوگا

و ا : و ب = ا ر : ب رَ

نیز زاویہ و دونوں میں مشترک ہے اور ر اور رَ پر کے باقی زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے ۔ اس لئے مثلثات متشابہ ہیں اور

و ر : و رَ = ا ر : ب رَ

یعنے نصف قطروں کی نسبت ۔

اسی طرح مثلثات و ا س ، و ب سَ پر غور کرنے سے جنمیں س اور سَ پر کے زاویوں میں سے ہر ایک قائمہ زاویہ سے بڑا ہے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

و س : و سَ = نصف قطروں کی نسبت

پس ہم دیکھتے ہیں کہ دائرہ ب کو دائرہ ا سے نقطہ و کے ذریعہ بنایا جا سکتا ہے۔ نقطہ و سے دائرہ ا کے تمام نقطوں تک کشیدہ سمتی نیم قطر لو اور انہیں نصف قطروں کی نسبت میں تقسیم کرو تو یہ حاصل نقطے دائرہ ب پر واقع ہوں گے۔

اسی خاصیت کی بناء پر و کو ان دو دائروں کا مشابہت کا مرکز کہتے ہیں اور نقطہ مَا کو ما کا جواب کہتے ہیں۔

اسی طرح طالب علم بطور خود یہ ثابت کر سکتا ہے کہ و بھی مشابہت کا ایک مرکز ہے۔

۲۶ — یہ ثابت کرنے میں کہ کسی ایسے نقطہ کا طریق جو کسی دئے ہوئے قانون کی پابندی کرے ایک دائرہ ہوتا ہے اگر گذشتہ دفعہ کے نتائج کا استعمال کرنا سہولت بخش ہوتا ہے۔

اگر ہم ثابت کر سکیں کہ ہمارا نقطہ ف ایسا ہے کہ وہ ایک ثابت نقطہ و اور ایک متغیر نقطہ ق کے ملانیوالے خط کو ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اور اگر یہ متغیر نقطہ ق ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ ف کا طریق بھی ایک دائرہ ہونا چاہئے جس کا اور نیز ق والے دائرہ کا مشابہت کا مرکز و ہوگا۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ ایک مثلث کا حائط دائرہ اور اس کے دو راس دیے گئے ہیں اور نو نقطی مرکز کا طریق معلوم کرنا ہے۔ یہ ثابت کرنا بہت آسان ہے کہ مرکز عمودی کا طریق ایک دائرہ ہے اور اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ نو نقطی مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے کیونکہ اگر و حائط مرکز ہو (جو دیا گیا ہے) اور ع مرکز عمودی ہو (جو ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے) اور ء نو نقطی مرکز ہو تو ء وع پر واقع ہوتا ہے اور وء = ½ وع، اس لئے ء کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز اُس خط میں ہے جو و کو اُس دائرہ کے مرکز سے ملاتا ہے جس پر ع واقع ہے۔

۲۷ — مسئلہ۔ اگر ایک نقطہ ایک مستوی سطح میں اس طرح

حرکت کرے کہ اس کے فاصلے مستوی کے دو ثابت نقطوں سے ایک مستقل نسبت میں رہیں تو نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہوتا ہے

فرض کرو کہ ا اور ب دو دیے ہوئے نقطے ہیں۔ اب کو داخلاً اور خارجاً ج اور د پر دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرو، اس طرح ج اور د مطلوبہ طریق پر دو نقطے ہوں گے۔

فرض کرو کہ طریق پر کوئی اور نقطہ ف ہے۔

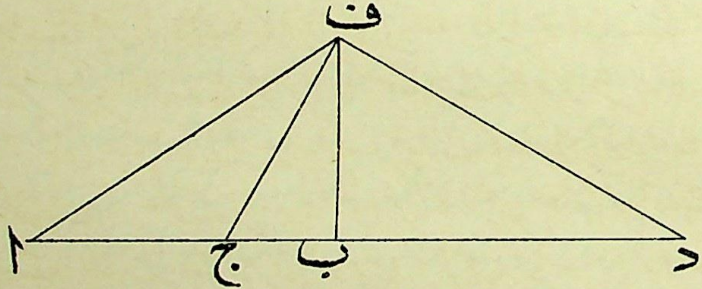
اب چونکہ

اف : ف ب = اج : ج ب = اد : ب د

اس لئے ف ج اور ف د، زاویہ اف ب کے داخلی اور خارجی ناصف ہیں۔

∴ ج ف د زاویہ قائمہ ہے۔

∴ ف کا طریق ایک دائرہ ہے جسکا قطر ج د ہے۔



نتیجہ صریح ۱ - اگر نقطہ ف ایک مستوی میں مقید نہ ہو تو اس کا طریق ایک کرہ ہوگا جسکا قطر ج د ہوگا۔

نتیجہ صریح ۲ - اگر خط اب داخلاً اور خارجاً ج اور د پر اسی نسبت میں تقسیم ہو اور ف کوئی نقطہ ہو جس پر ج د کے محاذی

ایک قائمہ زاویہ بنے تو ف ج اور ف د زاویہ ا ف ب کے داخلی اور خارجی ناصف ہوں گے۔

۲۸ ـ مرکزوں ا اور ب والے دائروں کے مشابہت کے مرکز (حسب تعریف دفعہ ۲۵) و اور وَ ہیں اگر خط و وَ پر ایک دائرہ بنایا جائے اور اس دائرہ پر کوئی نقطہ ج ہو تو دفعہ ۲۷ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

ج ا : ج ب = دائرہ ا کا نصف قطر : دائرہ ب کا نصف قطر

اس دائرہ کو جس کا قطر و وَ ہے مشابہت کا دائرہ کہتے ہیں۔

اس کا استعمال آخری باب میں جہاں اشکال کی مشابہت پر بحث کی گئی ہے بتلایا جائیگا۔

مشقیں

۱ — اگر ایک دئیے ہوئے دائرہ ا پر کوئی نقطہ ف ہو تو ف سے کسی دوسرے دئیے ہوئے دائرہ ب کے مماس کا مربع، دائروں ا اور ب کے بنیادی محور سے ف کے عمودی فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے۔

۲ — اگر ا، ب، ج تین ہم محور دائرے ہوں تو ج کے کسی نقطے سے ا اور ب کے مماس ایک مستقل نسبت میں ہوتے ہیں۔

۳ — اگر ایک نقطہ ف سے دو دئیے ہوئے دائروں کے مماس ایک دی ہوئی نسبت میں ہوں تو ف کا طریق ایک دائرہ ہے جو ا اور ب کے ساتھ ہم محور ہے۔

۴ — اگر ہم محور دائروں کا ایک نظام ا، ب، ج، وغیرہ ہو اور لا کوئی اور دائرہ ہو تو ا، لا؛ ب، لا؛ ج، لا وغیرہ کے بنیادی محور ایک نقطہ میں ملتے ہیں۔

۵ — دائروں کے ایک ہم محور نظام کے انتہائی نقطوں میں سے کسی ایک کو دائروں میں سے کسی ایک پر کے کسی نقطہ ف سے ملانے والے خط کا مربع، ف سے بنیادی محور کے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے۔

۶ — اگر دو دائرے دوسرے دو دائروں کو علی القوائم قطع کریں تو کسی ایک زوج کا بنیادی محور وہ خط ہے جو دوسرے زوج کے مرکزوں کو ملاتا ہے اور ان کے انتہائی نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

۷ — اگر دو دئیے ہوئے دائروں کے مشابہت کے دائرہ (دفعہ ۲۸) پر کوئی نقطہ لیا جائے اور اس نقطہ سے دونوں دائروں کے مماسوں کے زوج کھینچے جائیں تو ایک زوج کا درمیانی زاویہ دوسرے زوج کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے۔

۸ — تین دئے ہوئے دائروں (میں سے دو دو) کے مشابہت کے تین دائرے ہم محور ہوتے ہیں۔

۹ — ایک دئے ہوئے دائرہ پر نقطوں کا ایک زوج معلوم کرو جو نقطوں کے دو دئے ہوئے زوجوں میں سے ہر ایک کے ہم دائری ہو۔

۱۰ — اگر کوئی خط دو دئے ہوئے دائروں کو علی الترتیب ف، ق اور فَ، قَ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ وہ چار نقطے جہاں ف اور ق پر کے مماس فَ اور قَ پر کے مماسوں کو قطع کرتے ہیں ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جو دئے ہوئے دائروں کے ساتھ ہم محور ہوتا ہے۔

۱۱ — دائروں کے ایک ہم محور نظام کے انتہائی نقطے ک، کَ ہیں، اِس نظام کے ایک دائرہ کو مس کرتا ہوا ایک خط ف ق کھینچا گیا ہے جو دائرہ کو ف پر مس کرتا ہے، اس خط پر ایک نقطہ ق ہے جو بنیادی محور کی اُس جانب ہے جو ف کے مقابل ہے۔ اگر ت، تَ اُن مماسوں کے طول ہوں جو ف سے اُن دو ہم مرکز دائروں کے کھینچے گئے ہیں جنکا مشترک مرکز ق ہے اور جن کے نصف قطر علی الترتیب ق ک، ق کَ ہیں تو ثابت کرو کہ

ت : تَ = ف ک : ف کَ

۱۲ — ایک دائرہ ج کے محیط پر ایک ثابت نقطہ و ہے اور ف (27)
اِس دائرہ پر کوئی اور نقطہ ہے۔ ف کا مقلوب نقطہ ق ایک ثابت دائرہ کے لحاظ سے لیا گیا ہے جسکا مرکز و ہے۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۳ — تین دائرے ج$_{۱}$، ج$_{۲}$، ج$_{۳}$ ایسے ہیں کہ ج$_{۲}$ اور ج$_{۳}$ کا وتر تقاطع، ج$_{۱}$ کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور ج$_{۳}$ اور ج$_{۱}$ کا وتر تقاطع ج$_{۲}$ کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج$_{۱}$ اور ج$_{۲}$ کا وتر تقاطع ج$_{۳}$

کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۱۴ — تین دائروں ا، ب، ج کو ایک دائرہ جس کا مرکز ف ہے خارجاً مس کرتا ہے اور ایک دائرہ جسکا مرکز ق ہے داخلاً مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق اس نقطہ میں سے گذرتا ہے جس پر دائروں ا، ب، ج (میں سے دو دو) کے بنیادی محور ملتے ہیں۔

۱۵ — ایک دائرہ س کا ایک قطر اب ہے، اب یا اب ممدودہ پر ایک نقطہ و ہے، ج ایک دائرہ ہے جسکا مرکز و ہے۔ دائرہ ج کے لحاظ سے نقاط ا اور ب کے مقلوب نقطے اَ اور بَ ہیں۔ ثابت کرو کہ س کے لحاظ سے نقطہ و کا جو قطبی ہے اسکا دائرہ ج کے لحاظ سے قطب اَبَ کا وسطی نقطہ ہے۔

۱۶ — کروں کا ایک نظام ایک مستوی کو ایک ہی نقطہ و پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کوئی مستوی جو و میں سے نہ گذرتا ہو ان کروں کو ہم محور دائروں کے ایک نظام میں قطع کریگا۔

۱۷ — ایک نقطہ اور ایک متغیر دائرہ کے لحاظ سے اسکا قطبی دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی دوسرے نقطہ ا کا قطبی ایک ثابت نقطہ ب میں سے گذرتا ہے۔

۱۸ — ہم محور دائروں کے ایک نظام کے مستوی میں ایک نقطہ ا دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس نظام کے دائروں کے لحاظ سے نقطہ ا کے قطبی سب کے سب ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

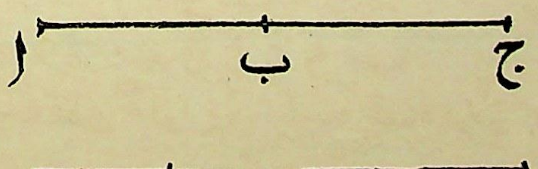
تیسرا باب

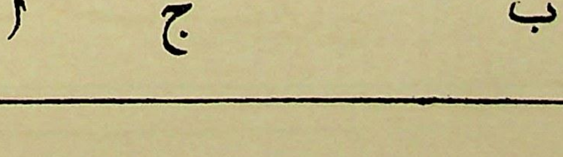
علامتوں کا استعمال نقطوں کا ہم خط اور خطوں کا ہم نقطہ ہونا۔

۲۹ ـــ علم مثلث اور علم ہندسہ تحلیلی میں خطوں کی پیمائش کے لئے علامتوں کی جو قرارداد اختیار کرلی گئی ہے اس سے ہر طالب علم واقف ہوگا۔ اس قرارداد کے مطابق ایک خط پر ایک نقطہ سے پیمائش کردہ طول مثبت یا منفی شمار کئے جاتے ہیں بموجب اس کے کہ یہ طول اس نقطہ سے ایک خاص یا دوسری سمت میں ناپے گئے ہوں۔

اِس قرارداد کی رُو سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک خط میں ا ب ج تین نقطے ہوں تو اس خط میں خواہ کسی ترتیب سے یہ نقطے واقع ہوں

ا ب + ب ج = ا ج





اگر ج، ا اور ب کے درمیان واقع ہے تو ب ج کی علامت اب کی علامت کے مخالف ہے اور اس صورت میں اب + ب ج سے وہ حقیقی فاصلہ نہیں حاصل ہوتا جو ا سے ب تک اور پھر ب سے ج تک گذرنے میں طے ہوا ہے لیکن اس سے وہ آخری فاصلہ ملتا ہے جو ا سے ج کا ہے۔

اوپر کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

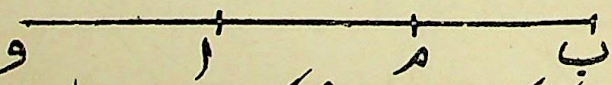
ب ج = اج - اب

یہ ایک اہم متماثلہ ہے۔ اس کے ذریعہ ہم سب طولوں کو ان طولوں پر تحویل کر کے منحصر کر سکتے ہیں جو خط کے ایک ثابت نقطہ سے پیمائش کئے گئے ہوں۔ اس عمل کو ادخال مبداء کے نام سے موسوم کرنا سہولت بخش ہوگا۔ مثلاً اگر ہم مبداء و کو داخل کریں تو

اب = وب - وا

۳۰۔ مسئلہ۔ اگر خط اب کا نقطہ وسطی م ہو اور اس خط میں و کوئی اور نقطہ ہو تو (29)

۲ وم = وا + وب



کیونکہ مبداء و داخل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

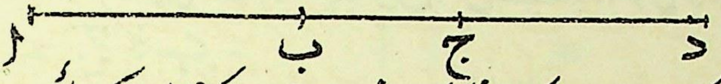
وم - وا = وب - وم

∴ ۲ وم = وا + وب

۳۱ ۔ اگر ایک خط پر نقطوں کی ایک تعداد واقع ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطے ایک سعت بناتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر چار نقطوں کی ایک سمت اُ، ب، ج، د ہو تو

اب × ج د + ب ج × اد + ج ا × ب د = ۰



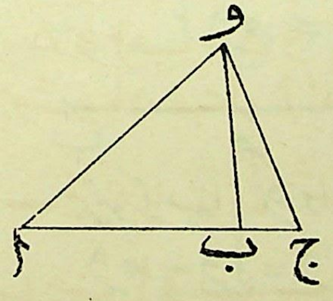
کیونکہ مبداء ا کو داخل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں جانب کا جملہ

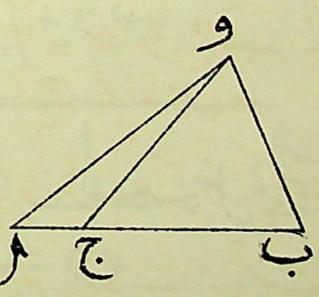
= اب (اد - اج) + (اج - اب) × اد
+ اج (اد - اب)

اور یہ صفر ہے۔

یہ ایک اہم متماثلہ ہے جسے ہم آیندہ استعمال کرینگے۔

۳۲ — اگر نقطوں کی ایک سمت اُ، ب، ج ہو اور ان کے خط سے باہر و کوئی نقطہ ہو تو ہم جانتے ہیں کہ مثلث و اب کے رقبہ کو جو نسبت مثلث و ب ج کے رقبہ کے ساتھ ہے وہ قاعدوں اب، ب ج کے طولوں کی نسبت ہے۔





اب اگر ہم طولوں اب، ب ج کی علامتوں کا لحاظ کر رہے ہیں اور نسبت اب : ب ج واقع ہوتی ہے تو ہم اس نسبت کی بجائے نسبت ∆ و اب : ∆ و ب ج درج نہیں کر سکتے تا آنکہ رقبوں کی

(30) علامتوں سے متعلق کوئی ایسی قرارداد نہ ہو جائے کہ جب اب : بج کی بجائے رقبوں کی نسبت درج کیجائے تو اب : بج کی علامت باقی رہے۔

اس کے لئے صریح قرارداد یہ ہے کہ مثلث ف ق ر کا رقبہ مثبت یا منفی شمار کیا جائے بموجب اس کے کہ جب گھیرا ف ق ر مرتسم ہو تو یہ مثلث ایک یا دوسری جانب واقع ہو۔

مثلاً اگر مثلث ہمارے بائیں ہاتھ کی جانب ہو جبکہ ہم گھیرے ف ق ر پر چلیں تو ہم △ف ق ر کو ایک مثبت مقدار شمار کرینگے لیکن △ف ر ق ایک منفی مقدار ہوگا کیونکہ گھیرا ف ر ق مرتسم کرنے میں رقبہ ہمارے دائیں ہاتھ کی جانب ہوتا ہے

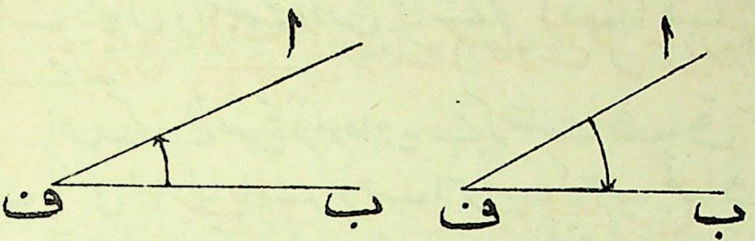
اس قرارداد کے ساتھ ہم دیکھتے ہیں کہ خط میں نقطے ا، ب، ج خواہ کسی ترتیب میں واقع ہوں

اب : بج = △واب : △وبج
= △اوب : △بوج

نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ ہم اپنی قرارداد کی رو سے یہ کہہ سکتے ہیں کہ
△واب + △وبج = △واج
اور △واب - △واج = △وجب
لیکن ہمیشہ یہ یاد رہے کہ ا، ب، ج ہم خط ہیں۔

۳۲۔ نیز ہم جانتے ہیں کہ مثلث واب کے رقبہ کی مقدار $\frac{1}{2}$ وا × وب جب اوب ہے اور بعض اوقات اس قیمت سے استفادہ کرنے میں سہولت ہوتی ہے۔ لیکن اگر ہم رقبوں واب، وبج کا مقابلہ ایک نسبت کے ذریعہ کر رہے ہوں تو ہم انکی بجائے

$\frac{1}{2}$ وا × وب جب اوب اور $\frac{1}{2}$ وب × وج جب ب وج



زاویہ اف ب

زاویہ ب ف ا

درج نہیں کر سکتے اِلّا آنکہ علامتوں کی ایک اور قرارداد ہو جس سے ہماری نسبت کی نہ صرف مقدار بلکہ علامت بھی برقرار رہے۔

یہاں بھی صریح قرارداد یہ ہوگی کہ اُن زاویوں کو مثبت خیال کیا جائے جو ایک سمت میں مرتسم ہوں اور منفی خیال کیا جائے جو دوسری مخالف سمت میں مرتسم ہوں۔ یہ قرارداد ہمارے مقصد کے لئے موثر ہوگی کیونکہ جب (-لا) = -جب لا۔

اس صورت میں ∠ اف ب = -∠ ب ف ا، زاویہ (31)
اف ب کو یوں سمجھنا چاہیے کہ جب خط ف ب محل ف ا سے شروع کر کے نقطۂ ف کے گرد گردش کرتا ہے تو زاویہ اف ب حاصل ہوتا ہے اور جب خط ف ا محل ف ب سے شروع کر کے نقطہ ف کے گرد گردش کرتا ہے تو زاویہ ب ف ا حاصل ہوتا ہے یہ گردشیں مخالف سمتوں میں ہیں اور اس لئے مختلف العلامت ہیں۔

زاویوں کی علامتوں سے متعلق اس قرارداد کے ساتھ ہم دفعہ ۳۲ کی شکلوں سے یہ استدلال کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{اب}}{\text{بج}} = \frac{\triangle\,\text{اوب}}{\triangle\,\text{بوج}} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{وا} \times \text{وب}\ \text{جب}\ \text{اوب}}{\frac{1}{2}\,\text{وب} \times \text{وج}\ \text{جب}\ \text{بوج}}$$

(خطوط وا، وب، وج سب مثبت سمجھے گئے ہیں)

$$= \frac{\text{و ا}}{\text{و ج}} \; \frac{\text{جب ا و ب}}{\text{جب ب و ج}}$$

اس طرح $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}}$ کی علامت استحالہ کے عمل میں برقرار رہتی ہے

کیونکہ

جب ا و ب اور جب ب و ج

ہم علامت یا مختلف العلامت ہیں بموجب اس کے کہ ا ب اور ب ج ہم علامت یا مختلف العلامت ہوں۔

طالب علم یہ دیکھ سکتا ہے کہ ہماری قرار داد بے فائدہ ہوتی اگر مثلث کا رقبہ زاویہ کی جیب پر منحصر ہونے کی بجائے راست اسکی جیب التمام پر منحصر ہوتا کیونکہ

جم (- ا) = + جم ا

۴۳ ـ ایک مثلث کے ضلعوں کے تین نقطوں کے ہم خط ہونیکے لئے شرط ۔

حسب ذیل مسئلہ جو مینلاس کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے بہت اہم ہے۔

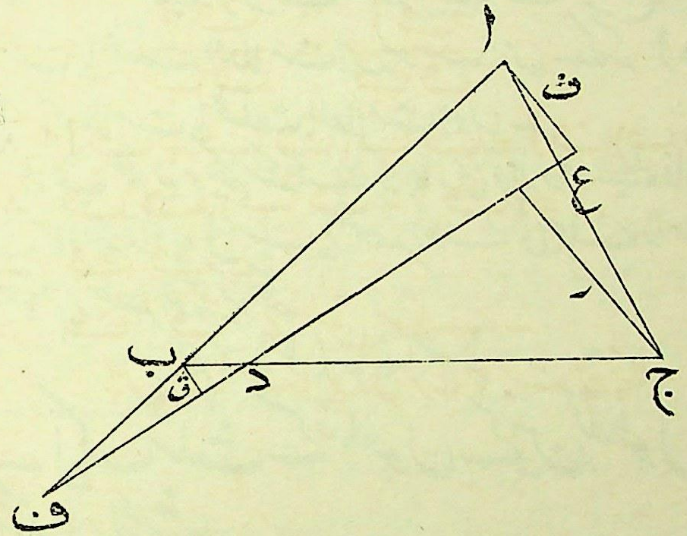
مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج کے مقابل کے اضلاع پر علی الترتیب نقاط د، ع، ف واقع ہیں۔ کافی اور ضروری شرط کہ یہ نقطے ہم خط ہوں یہ ہے کہ

اف × ب د × ج ع = اع × ج د × ب ف

بشرطیکہ اِن خطوں کی علامتوں کا لحاظ رکھا جائے۔

یہ سب خط مثلث کے ضلعوں پر ہیں۔ ہم ان میں سے کسی کو مثبت یا منفی سمجھینگے بموجب اس کے کہ مثلث ہمارے بائیں یا دائیں ہو جبکہ ہم اس خط پر چلیں۔

(32) ہم اول ثابت کرینگے کہ اگر د، ع، ف ہم خط ہیں تو اوپر کی شرط ضرور پوری ہوگی۔



فرض کرو کہ خط د ع ف پر ا، ب، ج سے عمود ن، ق، ر ہیں اور فرض کرو کہ انہیں مثبت یا منفی شمار کیا گیا ہے بموجب اس کے کہ وہ خط د ع ف کی ایک یا دوسری جانب واقع ہوں۔

اس قرارداد کے ساتھ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{اف}}{\text{بف}} = \frac{\text{ن}}{\text{ق}} \text{ ، } \frac{\text{بد}}{\text{جد}} = \frac{\text{ق}}{\text{ر}} \text{ ، } \frac{\text{جع}}{\text{اع}} = \frac{\text{ر}}{\text{ن}}$$

اس لئے
$$\frac{\text{اف} \times \text{بد} \times \text{جع}}{\text{بف} \times \text{جد} \times \text{اع}} = ۱$$

یعنے
$$\text{اف} \times \text{بد} \times \text{جع} = \text{بف} \times \text{جد} \times \text{اع}$$

اب فرض کرو کہ ضلعوں پر تین نقطے د، ع، ف ہیں ایسے کہ

اف × ب د × ج ع = اع × ج د × ب ف

تو ثابت کرنا ہے کہ د، ع، ف ہم خط ہونگے۔

فرض کرو کہ خط د ع، اب کو فَ پر قطع کرتا ہے۔

∴ افَ × ب د × ج ع = اع × ج د × ب فَ

∴ افَ / ب فَ = اف / ب ف

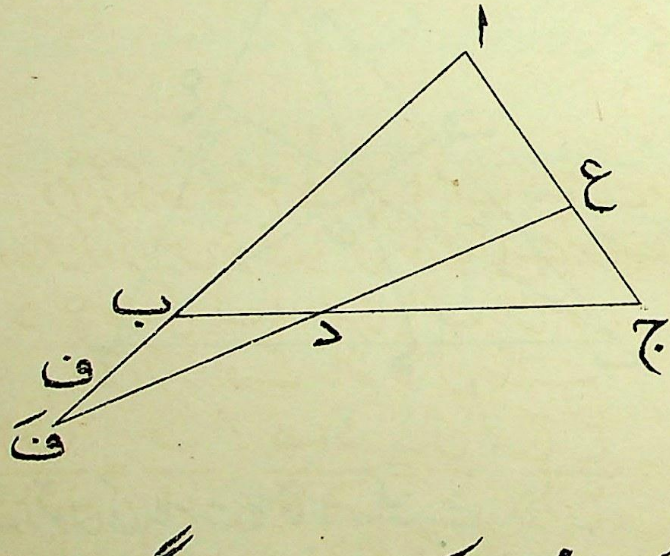
∴ (اف + ف فَ) ب ف = اف (ب ف + ف فَ) (33)

∴ ف فَ (ب ف - اف) = ۰

∴ ف فَ = ۰

∴ ف، فَ پر منطبق ہوتا ہے۔

پس ہمارا مسئلہ پوری طرح ثابت ہو چکا۔



۳۵ ـ ایک مثلث کے راسوں میں سے گذرنیوالے خطوں کے ہم نقطہ ہونے کے لئے شرط۔

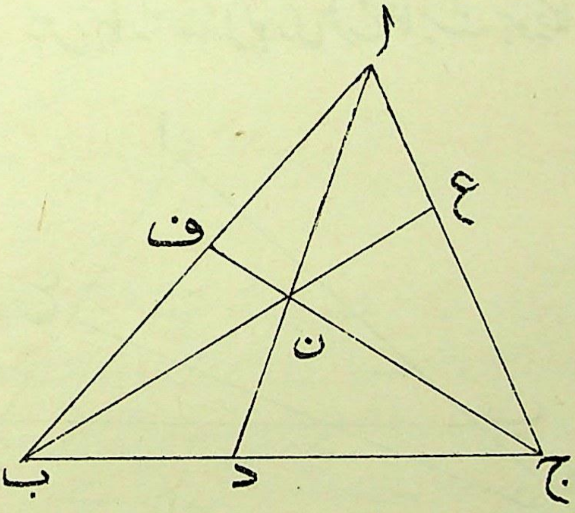
حسب ذیل مسئلہ جو سیوا کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے بنیادی ہے۔

ضروری اور کافی شرط کہ مثلث اب ج کے راسوں میں سے
(34) گذرنیوالے خط اد، بع، جف جو مقابل کے ضلعوں کو
د، ع، ف پر ملتے ہیں ہم نقطہ ہوں یہ ہے کہ

اف × بد × جع = - اع × جد × بف

جسمیں علامتوں کی قرارداد حسب دفعہ ماسبق اختیار کیگئی ہے۔

اول فرض کرو کہ خطوط اد، بع، جف نقطہ ن پر ملتے ہیں



تب رقبوں کی علامت کا لحاظ رکھنے سے

$$\frac{\text{اف}}{\text{بف}}=\frac{\Delta\,\text{افج}}{\Delta\,\text{بفج}}=\frac{\Delta\,\text{افن}}{\Delta\,\text{بفن}}=\frac{\Delta\,\text{افج}-\Delta\,\text{افن}}{\Delta\,\text{بفج}-\Delta\,\text{بفن}}$$

$$=\frac{\Delta\,\text{انج}}{\Delta\,\text{بنج}}$$

$$\frac{\text{بد}}{\text{جد}} = \frac{\triangle\text{بدا}}{\triangle\text{جدا}} = \frac{\triangle\text{بدن}}{\triangle\text{جدن}} = \frac{\triangle\text{بدا} - \triangle\text{بدن}}{\triangle\text{جدا} - \triangle\text{جدن}}$$

$$= \frac{\triangle\text{بنا}}{\triangle\text{جنا}}$$

$$\frac{\text{جع}}{\text{اع}} = \frac{\triangle\text{جعب}}{\triangle\text{اعب}} = \frac{\triangle\text{جعن}}{\triangle\text{اعن}} = \frac{\triangle\text{جعب} - \triangle\text{جعن}}{\triangle\text{اعب} - \triangle\text{اعن}}$$

$$= \frac{\triangle\text{جنب}}{\triangle\text{انب}}$$

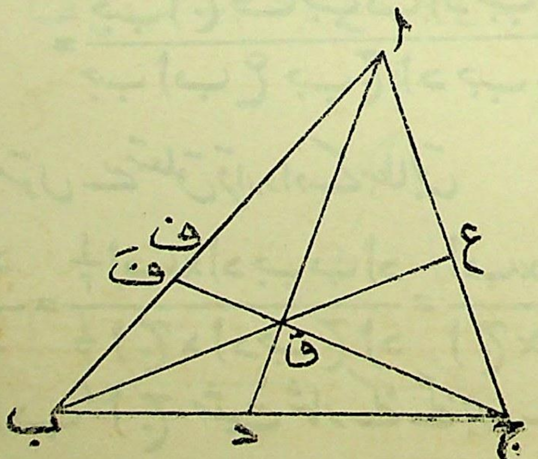
$$\therefore \frac{\text{اف} \times \text{بد} \times \text{جع}}{\text{اع} \times \text{جد} \times \text{بف}} = \frac{\triangle\text{انج}}{\triangle\text{جنا}} \times \frac{\triangle\text{بنا}}{\triangle\text{انب}} \times \frac{\triangle\text{جنب}}{\triangle\text{بنج}}$$

$$= (-1)(-1)(-1) = -1$$

اب فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر نقطے د، ع، ف ہیں ایسے کہ

$$\text{اف} \times \text{بد} \times \text{جع} = -\text{اع} \times \text{جد} \times \text{بف}$$

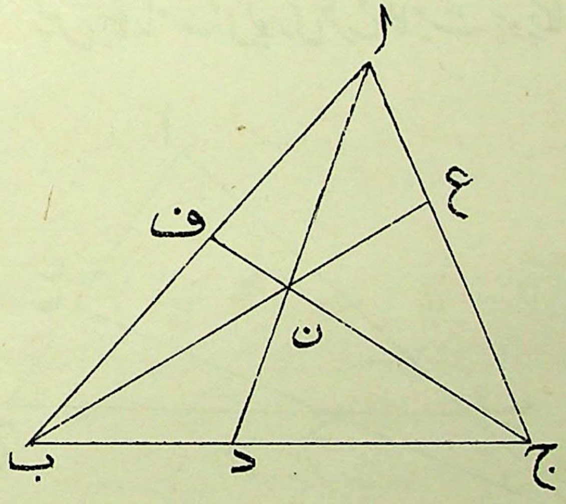
تو اد، ب ع، ج ف ہم نقطہ ہوں گے۔



حسب ذیل مسئلہ جو سیوا کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے بنیادی ہے۔
ضروری اور کافی شرط کہ مثلث اب ج کے راسئوں میں سے
(34) گذرنیوالے خط اد، ب ع، ج ف جو مقابل کے ضلعوں کو
د، ع، ف پر ملتے ہیں ہم نقطہ ہوں یہ ہے کہ

$$\text{اف} \times \text{بد} \times \text{جع} = -\,\text{اع} \times \text{جد} \times \text{بف}$$

جسمیں علامتوں کی قرارداد حسب دفعہ ماسبق اختیار کیگئی ہے۔
اول فرض کرو کہ خطوط اد، ب ع، ج ف نقطہ ن پر ملتے ہیں



تب رقبوں کی علامت کا لحاظ رکھنے سے

$$\frac{\text{اف}}{\text{بف}} = \frac{\triangle\,\text{افج}}{\triangle\,\text{بفج}} = \frac{\triangle\,\text{افن}}{\triangle\,\text{بفن}} = \frac{\triangle\,\text{افج} - \triangle\,\text{افن}}{\triangle\,\text{بفج} - \triangle\,\text{بفن}}$$

$$= \frac{\triangle\,\text{انج}}{\triangle\,\text{بنج}}$$

$$\frac{\text{ب د}}{\text{ج د}} = \frac{\triangle\,\text{ب د ا}}{\triangle\,\text{ج د ا}} = \frac{\triangle\,\text{ب د ن}}{\triangle\,\text{ج د ن}} = \frac{\triangle\,\text{ب د ا} - \triangle\,\text{ب د ن}}{\triangle\,\text{ج د ا} - \triangle\,\text{ج د ن}}$$

$$= \frac{\triangle\,\text{ب ن ا}}{\triangle\,\text{ج ن ا}}$$

$$\frac{\text{ج ع}}{\text{ا ع}} = \frac{\triangle\,\text{ج ع ب}}{\triangle\,\text{ا ع ب}} = \frac{\triangle\,\text{ج ع ن}}{\triangle\,\text{ا ع ن}} = \frac{\triangle\,\text{ج ع ب} - \triangle\,\text{ج ع ن}}{\triangle\,\text{ا ع ب} - \triangle\,\text{ا ع ن}}$$

$$= \frac{\triangle\,\text{ج ن ب}}{\triangle\,\text{ا ن ب}}$$

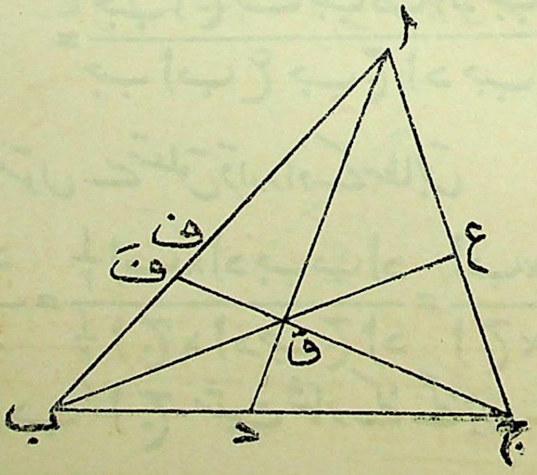
$$\therefore \frac{\text{ا ف} \times \text{ب د} \times \text{ج ع}}{\text{ا ع} \times \text{ج د} \times \text{ب ف}} = \frac{\triangle\,\text{ا ن ج}}{\triangle\,\text{ج ن ا}} \times \frac{\triangle\,\text{ب ن ا}}{\triangle\,\text{ا ن ب}} \times \frac{\triangle\,\text{ج ن ب}}{\triangle\,\text{ب ن ج}}$$

$$= (-1)(-1)(-1) = -1$$

اب فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر نقطے د، ع، ف ہیں ایسے کہ

$$\text{ا ف} \times \text{ب د} \times \text{ج ع} = -\,\text{ا ع} \times \text{ج د} \times \text{ب ف}$$

تو اد، ب ع، ج ف ہم نقطہ ہوں گے۔



فرض کرو کہ اد، ب ع نقطہ ق پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ ج ق، اب سے فَ پر ملتا ہے۔

(35)

$$\therefore\ \text{افَ} \times \text{ب د} \times \text{ج ع} = -\ \text{اع} \times \text{ج د} \times \text{ب ف}$$

$$\therefore\ \frac{\text{افَ}}{\text{ب فَ}} = \frac{\text{اف}}{\text{ب ف}}$$

$$\therefore\ (\text{اف} + \text{ف فَ})\ \text{ب ف} = (\text{ب ف} + \text{ف فَ})\ \text{اف}$$

$$\therefore\ \text{ف فَ}\ (\text{ب ف} - \text{اف}) = ۰$$

$$\therefore\ \text{ف فَ} = ۰$$

∴ ف، فَ پر منطبق ہوتا ہے۔

پس ہمارا مسئلہ پوری طرح ثابت ہو چکا۔

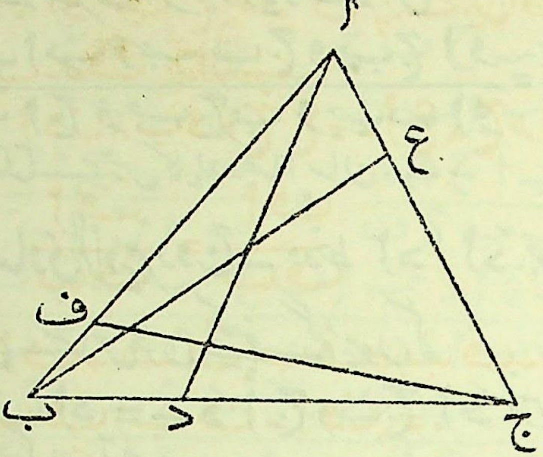
۳۶ - مسئلہ - اگر ایک مثلث اب ج کے ضلعوں پر تین نقطے د، ع، ف راسوں ا، ب، ج کے مقابل ہوں تو

$$\frac{\text{اف} \times \text{ب د} \times \text{ج ع}}{\text{اع} \times \text{ج د} \times \text{ب ف}} = \frac{\text{جب اج ف جب ب اد جب ج ب ع}}{\text{جب اب ع جب ج اد جب ب ج ف}}$$

کیونکہ علامتوں سے متعلق قرارداد کے مطابق

$$\frac{\text{ب د}}{\text{ج د}} = \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{اب} \times \text{اد جب ب اد}}{\tfrac{1}{2}\,\text{اج} \times \text{اد جب ج اد}} = \frac{\text{اب} \times \text{جب ب اد}}{\text{اج} \times \text{جب ج اد}}$$

جہاں اب، اج مثبت شمار کئے گئے ہیں۔



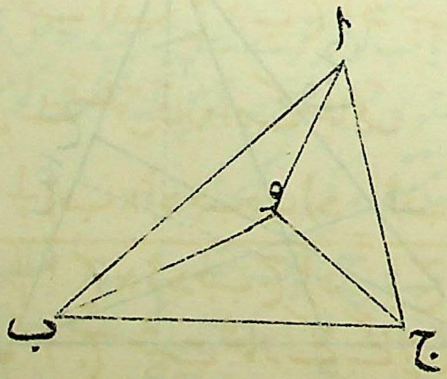
اسی طرح
$$\frac{\text{اف}}{\text{ب ف}} = \frac{\text{اج}}{\text{ب ج}} \; \frac{\text{جب اج ف}}{\text{جب ب ج ف}}$$

اور
$$\frac{\text{ج ع}}{\text{اع}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{اب}} \times \frac{\text{جب ج ب ع}}{\text{جب اب ع}}$$

$$\therefore \frac{\text{اف} \times \text{ب د} \times \text{ج ع}}{\text{اع} \times \text{ج د} \times \text{ب ف}} = \frac{\text{جب اج ف جب ب اد جب ج ب ع}}{\text{جب اب ع جب ج اد جب ب ج ف}}$$

(36) نتیجہ صریح۔ ضروری اور کافی شرط کہ اد، ب ع، ج ف ہم نقطہ ہوں یہ ہے کہ

$$\frac{\text{جب اج ف جب ب اد جب ج ب ع}}{\text{جب اب ع جب ج اد جب ب ج ف}} = -١$$



اگر نقطہ مشترک و ہو تو یہ رشتہ شکل

$$\frac{\text{جب اب و جب ب ج و جب ج او}}{\text{جب اج و جب ج ب و جب ب او}} = -1$$

میں لکھا جا سکتا ہے جس کا یاد رکھنا آسان ہے۔

۳۷ ۔ **متساوی الزاویہ مزدوج۔** دو خط اد، ادَ جو ایک مثلث کے راس ا میں سے اس طرح کھینچے گئے ہوں کہ

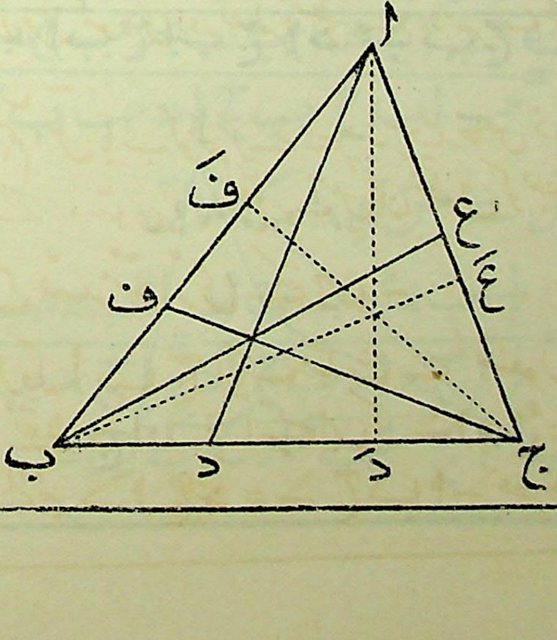
∠ب اد = ∠دَ اج (∠ج ادَ نہیں)

متساوی الزاویہ مزدوج کہلاتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر اد، ب ع، ج ف تین ہم نقطہ خط ہوں جو ایک مثلث اب ج کے راسوں میں سے کھینچے گئے ہیں تو ان کے متساوی الزاویہ مزدوج بھی ہم نقطہ ہونگے۔

فرض کرو کہ متساوی الزاویہ مزدوج ادَ، ب عَ، ج فَ ہیں تو چونکہ

$$\frac{\text{جب ب اد}}{\text{جب ج اد}} = \frac{\text{جب دَ اج}}{\text{جب دَ اب}} = \frac{\text{جب ج ادَ}}{\text{جب ب ادَ}} ،$$



(37)

$$\frac{\text{جب ج ب ع}}{\text{جب اب ع}} = \frac{\text{جب اب عَ}}{\text{جب ج ب عَ}}$$

اور

$$\frac{\text{جب اج ف}}{\text{جب ب ج ف}} = \frac{\text{جب ب ج فَ}}{\text{جب اج فَ}}$$

∴

$$\frac{\text{جب ج ادَ جب اب عَ جب ب ج فَ}}{\text{جب ب ادَ جب ج ب عَ جب اج فَ}} = \frac{\text{جب ب اد جب ج ب ع جب اج ف}}{\text{جب ج اد جب اب ع جب ب ج ف}} = \text{۱}$$

∴ ادَ، ب عَ، ج فَ ہم نقطہ ہیں۔

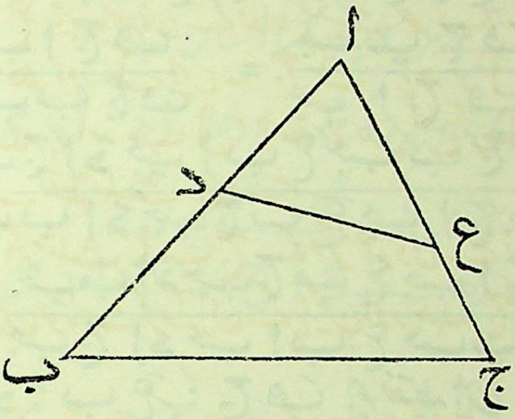
۳۸۔ کسی مثلث کے خطوط وسطی کے متساوی الزاویہ مزدوج اس کے شبہ وسطی کہلاتے ہیں۔ چونکہ خطوط وسطی ہم نقطہ ہوتے ہیں اسلئے شبہ وسطی بھی ہم نقطہ ہوتے ہیں۔ وہ نقطہ جس پر شبہ وسطی متقاطع ہوتے ہیں مثلث کا شبہ وسطی نقطہ کہلاتا ہے۔

طالب علم معلوم کرلیگا کہ کسی مثلث کے خطوط وسطی اور عمودوں کا ہم نقطہ ہونا اس باب کی شرطوں سے ظاہر ہے (دفعات ۳۵ اور ۳۶)۔ پہلے باب میں انہیں غیر تابع طریقوں کے ذریعہ ثابت کرنا مناسب سمجھا گیا تاکہ مرکز عمودی اور نقطہ وسطی کے دوسرے خواص بھی اخذ کئے جاسکیں۔

۳۹۔ ہم اس باب کو ختم کرنے سے پیشتر چند خاص خطوں کا ذکر کریں گے جو مثلث کے مستوی میں واقع ہوتے ہیں ان خطوں کو بعض مصنفین ضلعوں کے ضد متوازی کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ اب ج ایک مثلث ہے، ضلعوں اب اور اج میں نقطے د اور ع ایسے ہیں کہ ∠ ادع = ∠ ب ج ا اور اس لئے نیز ∠ اع د = ∠ ج ب ا۔ خط دع کو ب ج کا

ضد متوازی کہتے ہیں۔



یہ ظاہر ہے کہ د ب ج ع دائری ہے اور وہ سب خطوط جو ب ج کے ضد متوازی ہیں ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

یہ ثابت کرنا طالب علم پر چھوڑ دیا جاتا ہے کہ مثلث کا وہ شبہ وسطی خط جو ا میں سے گذرتا ہے ب ج کے تمام ضد متوازیوں کی تنصیف کرتا ہے۔

مشقیں

۱۔ وہ خطوط جو ایک مثلث کے راسوں کو اس کے حائط مرکز سے ملاتے ہیں مثلثوں کے عمودوں کے ساتھ مزدوج ہوتے ہیں۔

۲۔ وہ خط جو ایک مثلث کے رائسوں کو اُن نقاط تماس سے ملاتے ہیں جن پر اندرونی دائرہ اور جانبی دائرے متقابلہ ضلعوں کو مس کرتے ہیں علی الترتیب ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

۳۔ ا ب ج ایک مثلث ہے، راسوں ا، ب، ج سے متقابل کے اضلاع پر عمود اد، ب ع، ج ف کھینچے گئے ہیں۔ اگر ع ف، ف د، د ع پر علی الترتیب عمود ا گ، ب ھ، ج ک کھینچے جائیں تو

ا گ، ب ھ، ج ک ہم نقطہ ہوں گے۔

۴۔ مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج اور ج ا کے وسطی نقطے د اور ع ہیں اور ان کے نقاط تثلیث جو ب سے قریب ترین ہیں علی الترتیب ھ اور ک ہیں۔ ج ک، ا د کو ل پر اور ج ھ، ب ع کو ن پر اور ب ل، ا ھ کو م پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ب ع کا ایک نقطہ تثلیث ن ہے۔

(39) ۵۔ اگر مثلث ا ب ج کے مرکز عمودی سے زاویہ ا کے ناصفوں پر عمود کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے پائین اور ب ج کا وسطی نقطہ ہم خط ہیں۔

۶۔ ایک مثلث کے جانبی دائرے اس کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کو جن نقطوں پر مس کرتے ہیں انہیں علی الترتیب حرفوں د، ع، ف سے تعبیر کیا گیا ہے اور ان حرفوں پر لاحقے ۱، ۲، ۳ لگائے گئے ہیں بموجب اس کے کہ وہ ا، ب یا ج کے مقابل کے جانبی دائرہ سے متعلق ہوں۔ ب $ع_{۲}$ اور ج $ف_{۳}$ نقطہ پ پر متقاطع ہوتے ہیں نیز ب $ع_{۱}$ اور ج $ف_{۱}$ نقطہ ق پر، $ع_{۲}$ $ف_{۳}$ اور ب ج نقطہ لا پر، $ف_{۳}$ $د_{۱}$ اور ج ا نقطہ ما پر، $د_{۱}$ $ع_{۲}$ اور ا ب نقطہ ے پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطوں ا، پ، $د_{۱}$، ق، اور نقاط لا ما، ے کے گروہ علی الترتیب ہم خط ہیں۔

۷۔ ایک دائرہ کے نقطوں ا اور ب پر کے متوازی مماس اس دائرہ کے نقطہ ع پر کے مماس سے علی الترتیب نقطوں ج اور د پر منقطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا د، ب ج اور وہ خط جو ا ع اور ب ع کے وسطی نقطوں کو ملاتا ہے ہم نقطہ ہیں۔

۸۔ کسی مثلث ا ب ج کے راسوں سے خطوط ا د، ب ع، ج ف کھینچے گئے ہیں جو متقابلہ ضلعوں کو علی الترتیب د، ع، ف پر

قطع کرتے ہیں اور متقابل ضلعوں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں جبکہ انہیں مثلث کے گرد ایک ہی سمت میں پیمائش کیا گیا ہو۔ خطوط اد، ب ع، ج ف ایک مثلث اَبَ جَ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{اَب} \times \text{بَ ج} \times \text{جَ ا}}{\text{ا ع} \times \text{ب ف} \times \text{ج د}} = \frac{\text{اَ ج} \times \text{بَ ا} \times \text{جَ ب}}{\text{ا ف} \times \text{ب د} \times \text{ج ع}} = \frac{\text{ب ج} \times \text{ج ا} \times \text{ا ب}}{\text{ا د} \times \text{ب ع} \times \text{ج ف}}$$

۹۔ ایک مثلث کے شبہ وسطی نقطے میں سے ہر ضلع کے ضد متوازی خط کھینچے گئے ہیں جو دوسرے دو ضلعوں کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس طرح جو چھ نقطے حاصل ہوتے ہیں شبہ وسطی نقطے سے مساوی فاصلہ پہ ہوتے ہیں۔

[اِن چھ نقطوں میں سے گذرنیوالے دائرہ کو جیب التمامی دائرہ اسکی اس خاصیت کی بناء پر کہا گیا ہے کہ وہ متقطعے جو یہ دائرہ ضلعوں پہ قطع کرتا ہے متقابل زاویوں کی جیوب التمام کے متناسب ہوتے ہیں، اس خاصیت کی تصدیق طالب علم خود کر سکتا ہے۔]

۱۰۔ ایک مثلث کے شبہ وسطی نقطہ سے ہر ضلع کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں جو دوسرے دو ضلعوں کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ چھ نقطے جو اس طرح حاصل ہوتے ہیں اُس خط کے نقطہ وسطی سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں جو شبہ وسطی نقطہ کو حائط مرکز سے ملاتا ہے۔

[وہ دائرہ جو اِن چھ نقطوں میں سے گذرتا ہے لیموانی دائرہ کہلاتا ہے دیکھو لاکلان کی کتاب Modern pure geometry دفعہ ۱۳۱۔]

۱۱۔ ایک مثلث اب ج کے راسوں میں سے تین ہم نقطہ خطوط اد، ب ع، ج ف کھینچے گئے ہیں جو متقابل ضلعوں سے نقطوں

د، ع، ف پر ملتے ہیں۔ مثلث د ع ف کا حائط دائرہ مثلث اب ج کے ضلعوں کو مکرر نقطوں دَ، عَ، فَ پر قطع کرتا ہے۔ (40) ثابت کرو کہ اَدَ، ب عَ، ج فَ ہم نقطہ ہیں۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے راسوں سے اسکے حائط دائرہ کے مماس متقابلہ ضلعوں سے تین نقطوں پر ملتے ہیں جو ہم خط ہیں۔

۱۳۔ اگر ایک مثلث اب ج کے راسوں میں سے خطوط اد، ب ع، ج ف کھینچے گئے ہوں جو متقابلہ ضلعوں کو د، ع، ف پر ملتے ہیں اور ہم نقطہ ہیں اور اگر ا، ب، ج کے متقابلہ ضلعوں میں نقطے دَ، عَ، فَ ایسے لئے گئے ہوں کہ د دَ اور ب ج، ع عَ اور ج ا، ف فَ اور اب علی الترتیب ایک ہی وسطی نقطہ رکھتے ہیں تو ثابت کرو کہ اَدَ، ب عَ، ج فَ ہم نقطہ ہیں۔

۱۴۔ اگر ایک مثلث اب ج کے شبہ وسطی نقطہ س سے مثلث کے ضلعوں پر عمود س د، س ع، س ف ڈالے جائیں تو ثابت کرو کہ س، مثلث د ع ف کا وسطی نقطہ ہوگا۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ وہ مثلث جو ایک مثلث کے راسوں کو شبہ وسطی نقطہ سے ملانے سے بنتے ہیں مثلث کے ضلعوں کی نسبت مثناۃ میں ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک مثلث اب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، اب کو داخلاً نقطوں اَ، بَ، جَ سے اس طور پر تقسیم کیا گیا ہے کہ

ب اَ : اَ ج = ج بَ : بَ ا = ا جَ : جَ ب

نیز بَ جَ ممدودہ، ب ج کو خارجاً نقطہ اً پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

ب اً : ج اً = ج اَ^{۲} : اَ ب^{۲}۔

چوتھا باب

(41)

تظلیل

۴۰ ـــ اگر فضا میں کوئی نقطہ ط ہو اور کوئی دوسرا نقطہ ا ہو اور اگر ط ا، ممدودہ بشرط ضرورت، کسی دئے ہوئے مستوی س سے اَ پر ملے تو ہم کہتے ہیں کہ ا کا ظل مستوی س پر راس ط کے ذریعہ اَ ہے۔ یہ صاف ظاہر ہے کہ ایک خط مستقیم کا ظل کسی مستوی پیں پر ایک خط مستقیم ہوگا، یہ خط مستوی س اور اُس مستوی کا خط تقاطع ہے جس میں ط اور دیا ہوا خط واقع ہے۔

اگر ط میں سے اور ایک خاص خط میں سے گذرنے والا مستوی مستوی س کے متوازی ہو تو یہ خط مستوی س پر لاتناہی پر منظلل ہوگا۔ وہ خط جو مستوی س پر اس طرح حاصل ہوتا ہے اس مستوی کا لاتناہی کا خط کہلاتا ہے۔

۴۱ ـــ اب فرض کرو کہ ہم ایک مستوی س کے نقطوں کے ظل دوسرے مستوی س پر بذریعہ راس ط لے رہے ہیں۔

فرض کرو کہ مستوی س کے متوازی اور ط میں سے گذرنیوالا ایک مستوی مستوی س کو خط ا ب میں قطع کرتا ہے۔

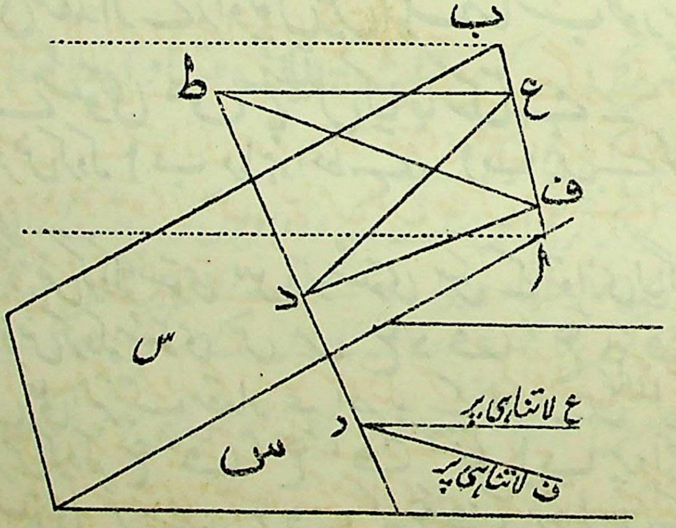
یہ خط اب مستوی س پر لاتناہی پر مظلل ہوگا اور اسلئے اب کو مستوی س پر خط معدوم کہتے ہیں ۔

یہ خط معدوم صریحاً مستویوں س اور س کے خط تقاطع کے متوازی ہوگا، اس خط تقاطع کو تظلیل کا محور کہتے ہیں ۔

۴۲ — اب فرض کرو کہ مستوی س میں ایک زاویہ ع د ف ہے اور فرض کرو کہ اسکی ساقیں د ع اور د ف خط معدوم اب کو ع اور ف میں قطع کرتی ہیں تو زاویہ ع د ف مستوی س پر بمقدار ع ط ف کے ایک زاویہ میں مظلل ہوگا۔

(42) کیونکہ فرض کرو کہ مستوی ط د ع مستوی س کو خط د ع میں قطع کرتا ہے ۔

اب چونکہ مستوی ط ع ف مستوی س کے متوازی ہے اسلئے مستوی ط د ع کے ساتھ ان مستویوں کے خطوط تقاطع متوازی ہیں یعنے د ع ط ع کے متوازی ہے۔



اسی طرح د ف، ط ف کے متوازی ہے۔

اس لئے < ع د ف = < ع ط ف

پس ہم دیکھتے ہیں کہ مُستوی س کا کوئی زاویہ مُستوی س پر ایک زاویہ میں مُظلّل ہوتا ہے جس کی مقدار اُس زاویہ کی مقدار کے مساوی ہوتی ہے جو ط پر خط منعدم کے اُس حصہ کے محاذی بنتا ہے جو دئے ہوئے زاویہ کی ساقوں سے منقطع ہوتا ہے۔

۴۳ ـ مسئلہ۔ تظلیل کے راس ط کا درست انتخاب کر کے مُستوی س کے کسی دئے ہوئے خط کو لاتناہی پر مُظلّل کیا جا سکتا ہے اور مُستوی س کے دو دئے ہوئے زاویوں کو دی ہوئی مقدار کے زاویوں میں ایک مناسب طور پر انتخاب کئے ہوئے مُستوی س پر مُظلّل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ اب دیا ہوا خط ہے۔ اب میں سے کوئی مُستوی سَ کھینچو

فرض کرو کہ مستوی س کو مُستوی سَ کے متوازی لیا گیا ہے۔

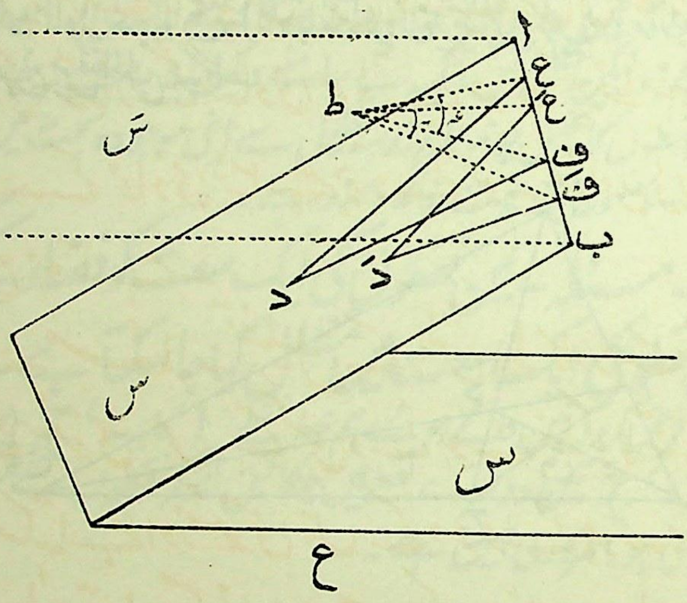
فرض کرو کہ مُستوی س میں ع د ف، عَ دَ فَ دو زاویے ہیں جنہیں علی الترتیب مقدار عہ اور بہ کے زاویوں میں مُظلّل کرنا ہے۔

فرض کرو کہ ع ف، عَ فَ، خط اب پر واقع ہیں۔

مستوی سَ میں ع ف، عَ فَ پر دائروں کے قطعات کھینچو جنکے زاوے علی الترتیب عہ اور بہ کے مساوی ہوں۔ فرض کرو کہ

یہ قطعات ایک دوسرے کو نقطہ ط پر کاٹتے ہیں ۔

اب اگر ط کو تظلیل کے راس کے طور پر لیا جائے تو اب ، لاتناہی مُظلل ہوگا اور زاوے ع دَ ف ، عَ دَ فَ علی الترتیب مقدار عہ اور بہ کے زاویوں میں مُظلل ہوں گے (دفعہ ۴۲)



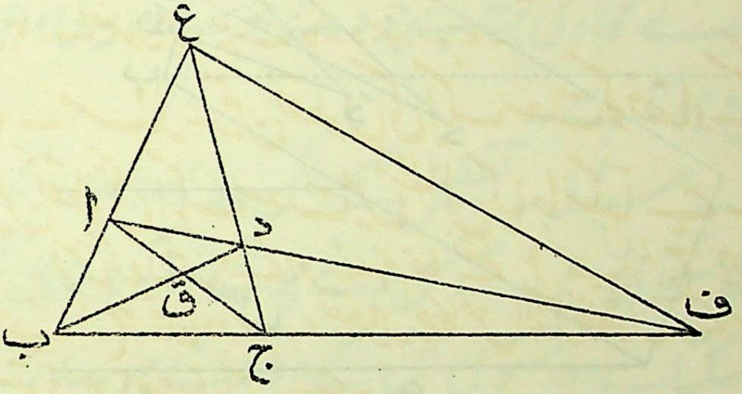
نتیجۂ صریح ۱ ۔ کسی مثلث کو ایک متساوی الاضلاع مثلث میں مُظلل کیا جا سکتا ہے ۔

کیونکہ اگر ہم اِس مثلث کے دو زاویوں کو ۶۰° کے زاویوں میں مُظلل کریں تو تیسرا زاویہ بھی ۶۰° کے ایک زاویہ میں مُظلل ہوگا کیونکہ مثلث کے تین زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویوں کے مساوی ہوتا ہے ۔

نتیجۂ صریح ۲ ۔ ایک ذواربعۃ الاضلاع کو ایک مربع میں مُظلل کیا جا سکتا ہے ۔

فرض کرو کہ اب ج د ذوار بعۃ الاضلاع ہے۔ فرض کرو کہ
ع ف اسکا تیسرا وتر ہے یعنے وہ خط جو متقابلہ اضلاع کے نقاط تقاطع
کو ملاتا ہے

فرض کرو کہ اج اور ب د، ق میں متقاطع ہوتے ہیں۔
اب اگر ہم ع ف کو لاتناہی پر منظلل کریں اور ساتھ ہی زاویوں
(44) ب اد اور ب ق ا کو قائمہ زاویوں میں منظلل کریں تو ذوار بعۃ الاضلاع
ایک مربع میں منظلل ہو گا۔



کیونکہ ع ف کی لاتناہی پر تظلیل اس امر کی ضمانت ہے کہ ظل ایک متوازی الاضلاع ہو اور پھر زاویہ ب اد کی ایک قائمہ میں تظلیل اس متوازی الاضلاع کو مستطیل بنا دیتی ہے اور زاویہ اق ب کی ایک قائمہ زاویہ میں تظلیل اس مستطیل کو ایک مربع بنا دیتی ہے۔

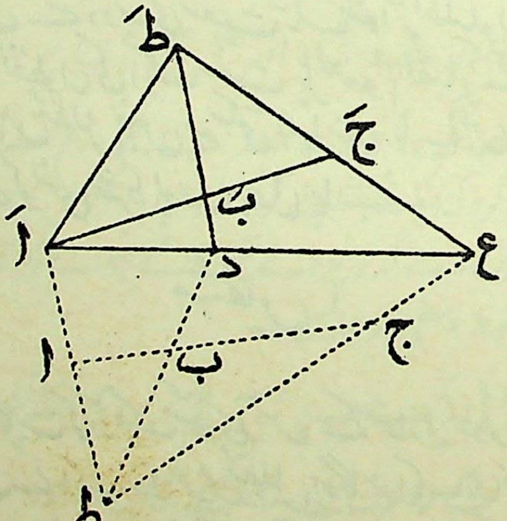
۴۴ — یہ ممکن ہے کہ پچھلے دفعہ کے خطوں د ع، دَ عَ میں سے ایک خط اب کے (جسے لاتناہی پر منظلل کرنا ہے) متوازی ہو۔ فرض کرو کہ د ع، اب کے متوازی ہے۔ اس صورت میں مستوی س میں ایک خط ف ط ایسا کھینچا ہو گا کہ زاویہ ع ف ط، عہ کا متمم ہو۔ تظلیل کا راس ط، خط ف ط اور ع فَ پر دائرہ کے نقطہ کا نقطہ تقاطع ہو گا

اگر دَ عَ بھی اب کے متوازی ہے تو نقطہ ط اوپر حاصل شدہ خط ف ط اور دوسرے خط فَ ط کا نقطۂ تقاطع ہوگا جہاں خط ف ط اس طور پر کھینچا گیا ہے کہ زاویہ عَ فَ طَ، یہ کا متمم ہے۔

۴۵ — نیز یہ بھی ممکن ہے کہ دفعہ ۴۳ کے مسئلہ میں اع ف ہ، عَ فَ ہَ پر دائروں کے جو قطعات کھینچے جائیں وہ کسی حقیقی نقطہ پہ متقاطع نہ ہوں اس صورت میں ط ایک خیالی نقطہ ہوگا یعنے ایک ایسا نقطہ جو جبری طور پر اہم ہو لیکن شکل میں آنکھ کے سامنے دکھایا نہ جا سکے۔ خیالی نقطوں اور خیالی خطوں کا تخیل جو ہم علم ہندسہ تحلیلی سے اپنی موجودہ بحث میں لے رہے ہیں ہمارے مضمون میں بہت فائدہ مند ہے۔

(45) ۴۶ — مسئلہ — تین نقطوں کی ایک سعت کو فضاء کے کسی اور تین نقطوں کی ایک سعت میں مُظلّل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ تین دئے ہوئے ہم خط نقطے ا، ب، ج ہیں اور اَ، بَ، جَ تین دوسرے نقطے ہیں جنکا قبل الذکر نقطوں کے ساتھ ہم مستوی ہونا ضروری نہیں ہے۔



ا اَ کو ملاؤ۔

ا اَ میں کوئی نقطہ ط لو۔

ط بَ، ط جَ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ ایک خط اَ د ع کو جو اَ سے مستوی ط ا ج میں کھینچا گیا ہے نقطوں د اور ع پر قطع کرتے ہیں۔

د بَ، ع جَ کو ملاؤ۔ یہ ایک سطح مستوی میں ہیں یعنی اُس مستوی میں جس میں خطوط اَ جَ اور اَ ع واقع ہیں۔

فرض کرو کہ د بَ اور ع جَ، طَ پر ملتے ہیں۔ طَ اَ کو ملاؤ۔

اب راس ط کے ذریعہ ا ب، ا ج کو اَ، د، ع میں مُظلل کیا جاسکتا ہے اور پھر اَ، د، ع کو راس طَ کے ذریعہ اَ، بَ، جَ میں مُظلل کیا جاسکتا ہے۔

پس ہمارا مسئلہ ثابت ہوچکا۔

۴۷ — طالب علم کو یہ سمجھ لینا چاہیئے کہ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک سعت
دوسری سعت میں مُظلل ہوسکتی ہے تو یہ ضروری نہیں ہے کہ ایک سعت
دوسری سعت میں صرف ایک واحد تظلیل سے مُظلل ہوسکے بلکہ ہم
ایک سعت سے دوسری سعت تک متواتر تظلیلوں کے ذریعہ پہنچ سکتے ہیں۔
چار نقطوں کی ایک سعت بالعموم فضا کے کسی اور چار نقطوں کی (46)
ایک سعت میں مُظلل نہیں ہوسکتی ہم آئندہ باب میں یہ دکھائیں گے کہ
اس کے لئے کونسی شرط پوری ہونی چاہیے۔

مشقیں

۱ — ثابت کرو کہ ایک مستوی س کے متوازی خطوں کا ایک نظام دوسرے مستوی پر خطوں کے ایک نظام میں مُظلل ہوگا جو ایک ہی نقطہ میں سے گذرینگے۔

۲ — دو ایسے زاوئے جنکی ساقیں خط منعدم سے ایک ہی نقطوں پر ملتی ہیں ہو

ایسے زاویوں میں منظلل ہونگے جو ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔

۳ — ثابت کرو کہ بالعموم تین زاوئے ایک ہی مقدار ع کے زاویوں میں منظلل ہو سکتے ہیں۔

۴ — ثابت کرو کہ ایک مثلث کو اس طور پر منظلل کیا جا سکتا ہے کہ اسکے مستوی کا کوئی خط لا متناہی پر منظلل ہو اور اس کے راسوں میں سے گذرنیوالے تین دئے ہوئے ہم نقطہ خطوط ظل میں مثلث کے عمود ہوں۔

۵ — ایک شکل کے ذریعہ سمجھاؤ کہ کس طرح ایک نقطہ م کو جو ایک خط ف ق پر واقع ہے لیکن حصہ ف ق سے باہر ہے ایک نقطہ ر میں منظلل کیا جا سکتا ہے جو ف اور ق کے درمیان واقع ہو جہاں ف اور ق، ف اور ق کے ظل ہیں۔

۶ — مثلث اب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، اب میں علی الترتیب کوئی تین نقطے ا۱، ب۱، ج۱ ہیں۔ ب۱ ج۱ اور ب ج، ف پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ج۱ ا۱ اور ج ا، گ پر اور ا۱ ب۱ اور اب، ہ پر۔ نیز ف ہ اور ب ب۱، م پر متقاطع ہوتے ہیں اور ف گ اور ج ج۱، ن پر۔

ثابت کرو کہ م گ، ن ہ اور ب ج ہم نقطہ ہیں۔

۷ — ثابت کرو کہ ایک مثلث کو اس طور پر منظلل کیا جا سکتا ہے کہ اس کے راسوں میں سے گذرنیوالے تین دئے ہوئے ہم نقطہ خطوط ظل میں مثلث کے خطوط وسطی ہو جائیں۔

۸ — اگر ا ا۱، ب ب۱، ج ج۱ تین ہم نقطہ خطوط ہوں جو ایک مثلث اب ج کے راسوں میں سے کھینچے گئے ہیں اور جو راسوں کے مقابل کے اضلاع سے ا۱، ب۱، ج۱ پر ملتے ہیں اور اگر ب۱ ج۱، ب ج سے

ا$_2$ پر ملے؛ ج$_1$ا$_1$، ج ا سے ب$_2$ پر ملے اور ا$_1$ب$_1$، اب
سے ج$_2$ پر ملے تو ا$_2$، ب$_2$، ج$_2$ ہم خط ہونگے۔

[ہم نقطہ خطوں کو خطوطِ وسطی میں مُظلِل کرو]۔

۹۔ اگر ایک مثلث کو ایک مُستوی سے دوسرے مُستوی پر مظلل کیا جائے تو متناظر ضلعوں کے تین نقاط تقاطع ہم خط ہونگے۔

* * *

پانچواں باب

چلیپی نسبتیں

۴۸ — تعریف — اگر ا، ب، ج، د نقطوں کی ایک سعت ہو تو نسبت $\frac{\text{اب} \times \text{جد}}{\text{اد} \times \text{جب}}$ کو اِن چار نقطوں کی ایک **چلیپی نسبت** کہتے ہیں اور اسے سہولت کی خاطر (ا ب ج د) کے ذریعہ تعبیر کرتے ہیں۔ اس میں حرفوں کی ترتیب وہی ہے جو چلیپی نسبت کے شمار کنندہ میں ان کی ترتیب ہے۔

بعض مصنف چلیپی نسبتوں کو غیر موسیقی نسبتیں کہتے ہیں۔ لیکن یہ اصطلاح استعمال کرنی مناسب نہیں اور اس سے گریز کرنا ہی بہتر ہے۔ کیونکہ "غیر موسیقی" کے معنے "موسیقی نہیں" کے نکلتے ہیں حالانکہ ایک چلیپی نسبت موسیقی ہو سکتی ہے یعنے وہ ایک موسیقی سعت کی چلیپی نسبت ہو سکتی ہے۔ طالب علم ساتویں باب میں اس نکتہ کو اچھی طرح سمجھ جائے گا۔

۴۹ — چار نقطوں کی سعت کی ایک چلیپی نسبت کے **لوازم** یہ ہیں (۱) ہر حرف شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں صرف ایک بار واقع ہوتا ہے (۲) نسب نما کے عناصر پہلے اور آخری حرفوں کو ایک ساتھ

اور تیسرے اور دوسرے حرفوں کو ایک ساتھ لکھنے سے اور صرف اس مخصوص ترتیب میں لکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

$\frac{\text{اب}\times\text{جد}}{\text{اد}\times\text{بج}}$ چلیپی نسبت نہیں ہے بلکہ ایک چلیپی نسبت کی منفی قیمت ہے کیونکہ یہ

$$= -\frac{\text{اب}\times\text{جد}}{\text{اد}\times\text{جب}} = -(\text{اب ج د})$$

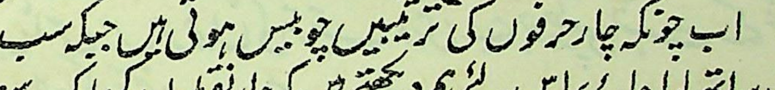
$\frac{\text{با}\times\text{جد}}{\text{اج}\times\text{دب}}$ اگرچہ ظاہرا چلیپی نسبت معلوم نہیں ہوتی لیکن ترتیب مکرر سے وہ چلیپی نسبت ہو جاتی ہے کیونکہ وہ

$$= \frac{\text{با}\times\text{جد}}{\text{بد}\times\text{جا}} = (\text{ب ا ج د})$$

(48) اب چونکہ چار حرفوں کی ترتیبیں چوبیس ہوتی ہیں جبکہ سب کو ایک ساتھ لیا جائے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ چار نقطوں کی ایک سعت سے جو چلیپی نسبتیں بنائی جا سکتی ہیں ان کی تعداد چوبیس ہے۔

۵۰ ۔ مسئلہ ۔ چار نقطوں کی ایک سعت کی چوبیس چلیپی نسبتیں چھ چلیپی نسبتوں کے مماثل ہوتی ہیں اور یہ سب انہیں سے کسی ایک چلیپی نسبت کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ $(\text{اب ج د}) = \text{ل}$



اولاً ہم دیکھتے ہیں کہ ایک چلیپی نسبت کے حرفوں میں سے دو دو کو ایک ساتھ تبدیل کردیا جائے تو چلیپی نسبت نہیں بدلتی، چنانچہ

(ب ا د ج) = $\frac{\text{ب ا × د ج}}{\text{ب ج × د ا}}$ = $\frac{\text{اب × ج د}}{\text{اد × ج ب}}$ = (اب ج د)

(ج د اب) = $\frac{\text{ج د × اب}}{\text{ج ب × اد}}$ = $\frac{\text{اب × ج د}}{\text{اد × ج ب}}$ = (اب ج د)

(د ج ب ا) = $\frac{\text{د ج × ب ا}}{\text{د ا × ب ج}}$ = $\frac{\text{اب × ج د}}{\text{اد × ج ب}}$ = (اب ج د)

اس لئے

(اب ج د) = (ب ا د ج) = (ج د اب) = (د ج ب ا)
= لہ ...... (۱)

ثانیاً ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم یا تو پہلے اور تیسرے حرفوں کو باہم یا دوسرے اور چوتھے حرفوں کو باہم تبدیل کریں، تو چلیپی نسبت الٹ جاتی ہے چنانچہ

(ا د ج ب) = (ب ج د ا) = (ج ب ا د) = (د اب ج)

= $\frac{\text{۱}}{\text{لہ}}$ ...... (۲)

یہ چلیپی نسبتیں (۱) کی نسبتوں میں دوسرے اور چوتھے حرفوں کے باہمی تبادلے سے حاصل کی گئی ہیں؛ یہی نتیجہ حاصل ہوگا اگر ہم پہلے اور تیسرے حرفوں کو باہم تبدیل کریں۔

ثالثاً چونکہ دفعہ ۳۱ کی رو سے

اب × ج د + ب ج × اد + ج ا × ب د = ۰

∴ $\frac{\text{اب × ج د}}{\text{اد × ج ب}}$ − ۱ + $\frac{\text{ج ا × ب د}}{\text{اد × ج ب}}$ = ۰

$$\therefore\ \text{۱} - \text{لہ} = \frac{\text{ج ا} \times \text{ب د}}{\text{ا د} \times \text{ج ب}} = \frac{\text{ا ج} \times \text{ب د}}{\text{ا د} \times \text{ب ج}} = (\text{ا ج ب د})$$

(49) اس طرح دوسرے اور تیسرے حرفوں کے باہمی تبادلہ سے لہ، ۱ - لہ میں بدلجاتا ہے۔ پہلے اور چوتھے حرفوں کو باہم تبدیل کرنے سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔

اس لئے (۱) سے

(ا ج ب د) = (ب د ا ج) = (ج ا د ب) = (د ب ج ا)

$$= (\text{۱} - \text{لہ}) \ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

اور پھر (۳) میں دوسرے اور چوتھے حرفوں کے باہمی تبادلہ کے ذریعہ حاصل ہوگا

(ا د ب ج) = (ب ج ا د) = (ج ب د ا) = (د ا ج ب)

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{لہ}} \ldots\ldots\ldots (\text{۴})$$

اِن میں دوسرے اور تیسرے حرفوں کے باہمی تبادلہ سے حاصل ہوگا

(ا ب د ج) = (ب ا ج د) = (ج د ب ا) = (د ج ا ب)

$$= \text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{لہ}} = \frac{\text{لہ}}{\text{لہ} - \text{۱}} \ldots\ldots (\text{۵})$$

اور اب دوسرے اور چوتھے حرفوں کے باہمی تبادلہ سے حاصل ہوگا

(ا ج د ب) = (ب د ج ا) = (ج ا ب د) = (د ب ا ج)

$$= \frac{\text{لہ} - \text{۱}}{\text{لہ}} \ldots\ldots\ldots (\text{۶})$$

اس طرح ہم نے تمام چلیپی نسبتوں کو لہ کی رقوم میں بیان کردیا اور ہم دیکھتے ہیں کہ اگر چارہم خط نقطوں کی ایک چلیپی نسبت دوسرے چارہم خط نقطوں کی ایک چلیپی نسبت کے مساوی ہو تو پہلی سعت کی ہر چلیپی نسبت دوسری سعت کی متناظر چلیپی نسبت کے مساوی ہوگی۔

ایسی دو سعتیں ہم چلیپہ کہی جاسکتی ہیں۔

۵۱ — مسئلہ۔ اگر ا، ب، ج تین ہم خط نقطے ہوں اور اِن کے خط میں د، ع ایسے دوسرے نقطے ہوں کہ

(اب ج د) = (اب ج ع)

تو د، ع پر منطبق ہونا چاہیئے۔

چونکہ

$$\frac{\text{اب × ج د}}{\text{اد × ج ب}} = \frac{\text{اب × ج ع}}{\text{اع × ج ب}}$$

∴ اع × ج د = اد × ج ع

∴ (اد + دع) ج د = اد (ج د + دع)

∴ دع (اد − ج د) = ۰

∴ دع × اج = ۰

∴ دع = ۰ کیونکہ اج ≠ ۰

یعنے د اور ع منطبق ہوتے ہیں۔

۵۲ — مسئلہ۔ چار نقطوں کی ایک سعت، کسی مُستوی پر (50) اپنے ظِل کے ساتھ ہم چلیپہ ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ سعت اب ج د کو راس ط کے ذریعہ اَ بَ جَ دَ میں مُظلل کیا گیا ہے۔ اب

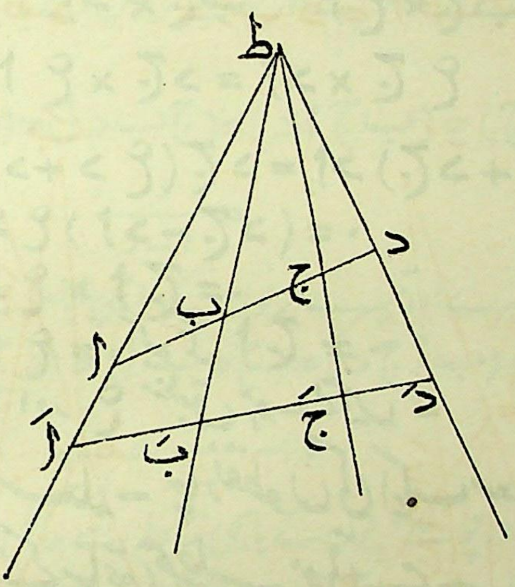
$$\frac{\text{اب × ج د}}{\text{اد × ج ب}} = \frac{\text{△ اط ب}}{\text{△ اط د}} \times \frac{\text{△ جط د}}{\text{△ جط ب}}$$

، رقبوں کی علامتوں کا لحاظ کرتے،

$$= \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{ط ا} \times \text{ط ب جب ا ط ب}}{\tfrac{1}{2}\,\text{ط ا} \times \text{ط د جب ا ط د}} \times \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{ط ج} \times \text{ط د جب ج ط د}}{\tfrac{1}{2}\,\text{ط ج} \times \text{ط ب جب ج ط ب}}$$

زاویوں کی علامتوں کا لحاظ کرتے،

$$= \frac{\text{جب ا ط ب جب ج ط د}}{\text{جب ا ط د جب ج ط ب}}$$



شکل (۱)

اسی طرح

$$\frac{\text{اَ بَ} \times \text{جَ دَ}}{\text{اَ دَ} \times \text{جَ بَ}} = \frac{\text{جب اَ ط بَ} \times \text{جب جَ ط دَ}}{\text{جب اَ ط دَ} \times \text{جب جَ ط بَ}}$$

اب اُن تمام صورتوں میں جو پیدا ہو سکتی ہیں

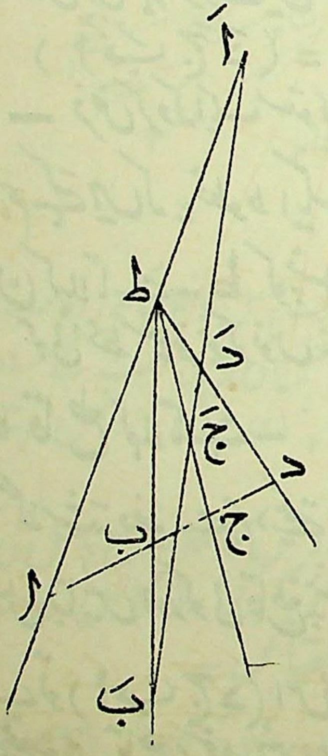
$$\frac{\text{جب اطب جب جطد}}{\text{جب اطد جب جطب}} = \frac{\text{جب اَطبَ جب جَطدَ}}{\text{جب اُطدَ جب جَطبَ}}$$ (۵۲)

یہ شکل (۱) کی صورت میں صاف ظاہر ہے۔
شکل (۲) میں

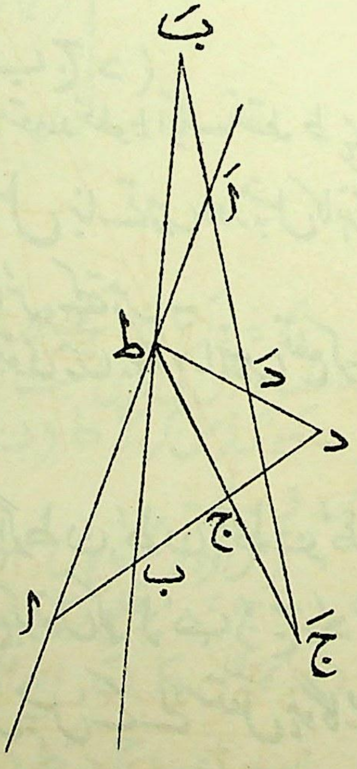
جب اَطبَ = جب بَطا، کیونکہ یہ زاوئے متمم ہیں

= - جب اطب

اور جب اَطدَ = جب دَطا = - جب اطد



شکل (۲)



شکل (۳)

نیز جب جَ طدَ = جب ج ط د

اور جب جَ طبَ = جب ط ب

شکل (۳) میں

جب اَ ط بَ = جب ا ط ب

جب جَ ط دَ = جب ج ط د

جب اَ ط دَ = جب دَ ط ا = - جب ا ط د

جب جَ ط بَ = جب ب ط ج = - جب ج ط ب

اس طرح ہر صورت میں

(اَ بَ جَ دَ) = (ا ب ج د)

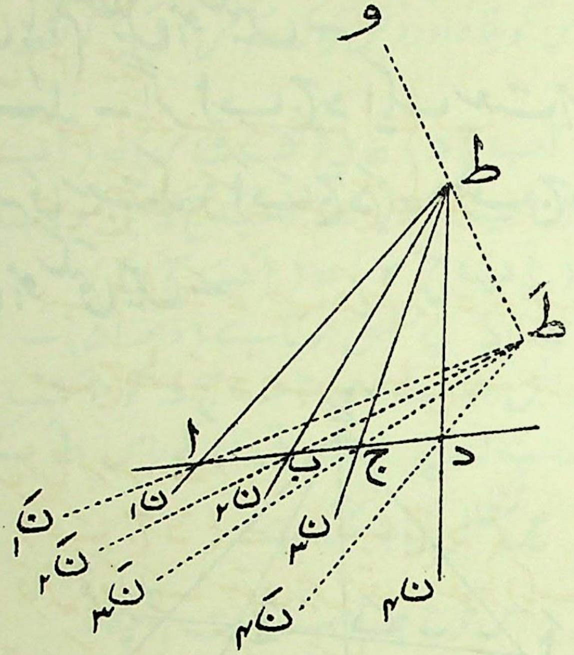
۵۳ — فرض کرو کہ ایک مستوی میں متعدد خطوط ایک نقطہ ط پر ملتے ہیں، ہم کہتے ہیں کہ یہ خطوط ایک پنسل بناتے ہیں اور پنسل کا ہر ترکیبی خط کرن کہلاتا ہے۔ ط کو پنسل کا رائس کہتے ہیں۔ (52)

کوئی خط مستقیم جو کرنوں کے مستوی میں ہو اور انہیں قطع کرے پنسل کا قاطع کہلاتا ہے۔

گذشتہ دفعہ سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ط ن۱، ط ن۲، ط ن۳، ط ن۴ ایک پنسل بنائیں اور کوئی قاطع پنسل کی کرنوں کو ا، ب، ج، د میں قطع کرے تو (ا ب ج د) اس مخصوص پنسل کے لئے مستقل ہوگا یعنی وہ اس مخصوص قاطع پر منحصر نہیں ہوگا۔

اِس مستقل چلیپی نسبت کو ترقیم ط (ن۱ ن۲ ن۳ ن۴) سے ظاہر

کرنے میں سہولت ہوگی۔



ہم یہ بہ آسانی دیکھتے ہیں کہ اگر ایک پنسل کا ظل کسی دوسرے مستوی پر لیا جائے تو ظل کی چلیپی نسبت اصلی پنسل کی چلیپی نسبت کے مساوی ہوگی۔ کیونکہ فرض کرو کہ ط (ن۱، ن۲، ن۳، ن۴) پنسل ہے اور ظل کا راس و ہے۔

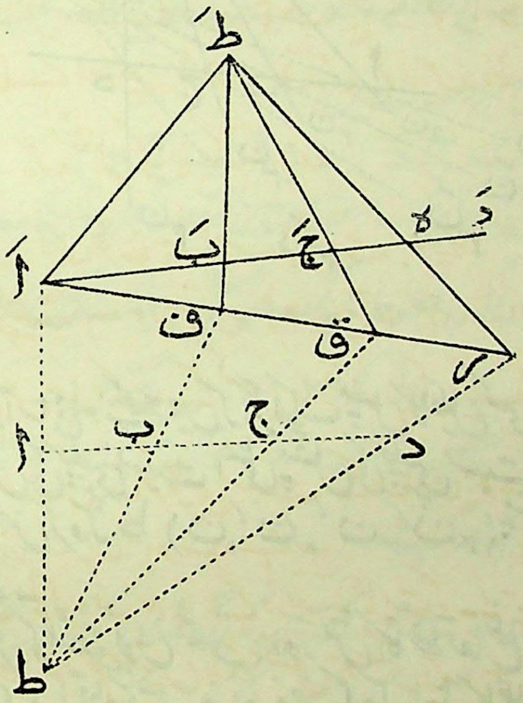
(58) فرض کرو کہ مستویوں س اور س کا خط تقاطع پنسل کی کرنوں کو ا، ب، ج، د پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ط کا ظل طَ ہے، ط ن۱ کا ظل طَ نَ۱ اور علیٰ ہذا القیاس۔

اب ا ب ج د طَ (نَ۱، نَ۲، نَ۳، نَ۴) کا بھی قاطع ہے، اسلئے

ط (ن۱ ن۲ ن۳ ن۴) = (ا ب ج د) = طَ (نَ۱ نَ۲ نَ۳ نَ۴)

۵۴ ـ اب ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ چار نقطوں کی دو سعتیں باہم مُظلل ہو سکیں ـ

مسئلہ ـ اگر ا ب ج د ایک سعت ہو اور اَ بَ جَ دَ ایسی دوسری سعت کہ (اَ بَ جَ دَ) = (ا ب ج د) تو یہ دو سعتیں باہم مُظلل ہو سکتی ہیں ـ



ا اَ کو ملاؤ اور اس پر کوئی نقطہ ط لو ـ
ط ب، ط ج، ط د کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ خط، نقطہ اَ میں سے گذرنیوالے اور مُستوی ط ا د میں واقع ہونے والے ایک خط سے

علی الترتیب ف، ق، ر پر ملتے ہیں۔

فَ بَ، قَ جَ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ طَ پر ملتے ہیں۔

طَ اَ، طَ رَ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ طَ رَ، اَ دَ کو نقطہ لا پر قطع کرتا ہے۔

(54) اب (اَ ب ج د) = (اَ ف ق ر) = (اَ بَ جَ لا)

لیکن (اَ ب ج د) = (اَ بَ جَ دَ) بموجب فرض

∴ (اَ بَ جَ لا) = (اَ بَ جَ دَ)

∴ لا، دَ پر منطبق ہوتا ہے (دفعہ ۵۱)۔

پس لائن ط کے ذریعہ ا ب ج د کو اَ ف ق ر میں مُظلّل کیا جا سکتا ہے اور پھر اَ ف ق ر کو اس طَ کے ذریعہ اَ بَ جَ دَ میں مُظلّل کیا جا سکتا ہے۔

اس طرح ہمارا مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۵۵ — **تعریف** — دو سعتیں ا ب ج د ع ... اور اَ بَ جَ دَ عَ ... ہم رسم کہلاتی ہیں جبکہ ایک کے کسی چار نقطوں کی ایک چلیپی نسبت دوسرے کے متناظر چار نقطوں کی متناظر چلیپی نسبت کے مساوی ہو۔ اس کو حسب ذیل ترقیم سے ظاہر کرنے میں سہولت ہے۔

طالب علم کو دفعہ ۵۴ کے ذریعہ یہ ثابت کرنے میں کوئی دقّت نہیں ہوگی کہ دو ہم رسم سعتیں باہم مُظلّل ہو سکتی ہیں۔

دو پنسلیں

ط (ف، ق، ر، س، ت ...)،

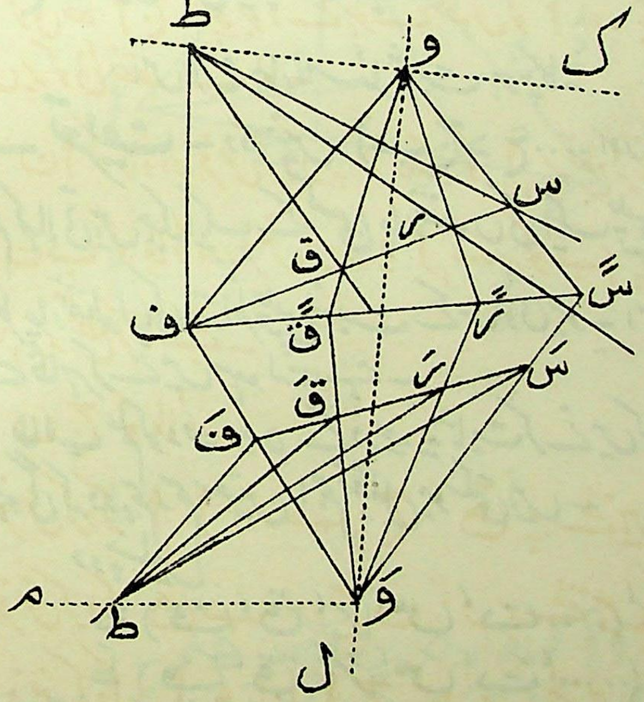
اور طَ (فَ، قَ، رَ، سَ، تَ ...)

ہم رسم کہلاتی ہیں جبکہ ایک کی کسی چار کرنوں سے بنی ہوئی پنسل کی چلیپی نسبت دوسرے کی چار متناظر کرنوں سے بنی ہوئی پنسل کی متناظر چلیپی نسبت کے

مساوی ہو۔

۵۶۔ مسئلہ۔ دو ہم رسم پنسلیں باہم مُظلل ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ دو ہم رسم پنسلوں کے کوئی دو قاطع ف ق ر س۔
فَ قَ رَ ..... ہیں اور پنسلوں کے راس ط اور طَ ہیں۔
فرض کرو کہ ف قً رً سً ..... وہ مشترک سمت ہے
جسمیں اوپر کی دونوں سمتیں راسوں و اور وَ کے ذریعہ مُظلل ہو سکتی ہیں
اب وط پر ایک راس ک لینے سے پنسل ط (ف ق ر س ...)
پنسل و (ف، قً، رً، سً، ...) میں مُظلل ہو سکتی ہے اور یہ



آخری پنسل و وَ پر کے ایک راس ل کے ذریعہ پنسل وَ (فَ قَ رَ سَ ...) میں

یعنی پنسل وَ (فَ، قَ، رَ، سَ، ....) میں مُظلل ہو سکتی ہے اور پھر اسے وَ طَ پر کے ایک راس م کے ذریعہ طَ (فَ، قَ، رَ، سَ...) میں مُظلل کیا جا سکتا ہے ۔

۵۷ — ہم یہ دکھا کر اس باب کو ختم کریں گے کہ ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے جو دو دئے ہوئے متوازی خطوں کے مُستوی میں ہے ایک خط اِن خطوں کے متوازی کس طرح کھینچا جا سکتا ہے جبکہ عمل صرف پٹڑی کے ذریعہ کیا گیا ہو ۔

فرض کرو کہ دو دئے ہوئے خط ا سہ، ا$_1$ سہ ہیں جہاں سہ اور سہ اِن خطوں پر لاتناہی پر کا وہ نقطہ ہے جہاں وہ باہم ملتے ہیں ۔

فرض کرو کہ اِن خطوں کے مُستوی میں ن دیا ہوا نقطہ ہے ۔

کوئی خط ا ج کھینچو جو دئے ہوئے خطوں کو ا اور ج پر قطع کرے اور اس پر کوئی نقطہ ب لو ۔

ن ا کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ا$_1$ سہ کو ا$_1$ پر قطع کرتا ہے ۔

ن ب کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ا$_1$ سہ کو ب$_1$ پر اور ا سہ کو ب$_2$ پر قطع کرتا ہے ۔

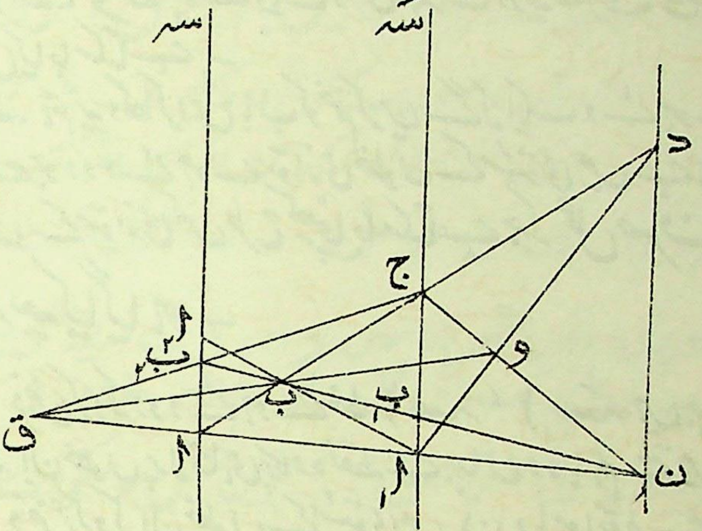
ن ج کو ملاؤ ۔

فرض کرو کہ ا$_1$ ا اور ب$_2$ ج، ق پر ملتے ہیں ۔

(56) فرض کرو کہ ق ب اور ج ن، و پر ملتے ہیں ۔

فرض کرو کہ ا$_1$ و اور ا ج، د پر ملتے ہیں ۔

ن د مطلوبہ خط ہوگا ۔



کیونکہ

(ا$_1$ب$_1$ج سہ) = ب(ا$_1$ب$_1$ج سہ) = (ا$_2$ب$_2$ ا سہ) = ا$_1$(ا$_2$ب$_2$ ا سہ)

= (ب ب$_2$ ن ب$_1$) = ج(ب ب$_2$ ن ب$_1$) = (ا ق ن ا$_1$)

= و(ا ق ن ا$_1$) = (ا ب ج د)

∴ ن(ا$_1$ب$_1$ج سہ) = ن(ا ب ج د)

∴ ن د اور ن سہ ایک ہی خط میں ہیں۔

یعنے ن د، دئے ہوئے خطوں کے متوازی ہے۔

مشقیں

۱۔ اگر (ا ب ج د) = $-\frac{1}{3}$ اور ب، اد کا وہ نقطہ تثلیث ہو

جو ا کی جانب ہے تو ثابت کرو کہ ا د کا دوسرا نقطہ تثلیث ج ہے ۔

۲ ـــ تین نقطوں ا، ب، ج کی ایک سعت دیگئی ہے، اِنکے خط پر ایک چوتھا نقطہ د ایسا معلوم کرو کہ (ا ب ج د) ایک دی ہوئی قیمت اختیار کرے ۔

(57) ۳ ـــ اگر قاطع ا ب ج، و د کے متوازی ہو جو پنسل و (ا، ب، ج، د) کی ایک کرن ہے تو ثابت کرو کہ

و (ا ب ج د) = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ج ب}}$

۴ ـــ اگر (ا ب ج د) = (ا ب ج دَ) تو (ا ب ج جَ) = (ا ب د دَ)

۵ ـــ اگر چار مختلف نقطوں کی ایک سعت ا، ب، ج، د ہو اور

(ا ب ج د) = (ا د ج ب)

تو انمیں سے ہر نسبت = - ۱

۶ ـــ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط مرکز، نقطہ وسطی، نو نقطی مرکز اور مرکز عمودی سے جو سعت بنتی ہے اِسکی چلیپی نسبتوں میں سے آٹھ نسبتیں - ۱ کے مساوی ہیں، آٹھ ۲ کے مساوی اور آٹھ $\frac{1}{2}$ کے مساوی ۔

۷ ـــ ثابت کرو کہ کوئی مُستوی چار دئے ہوئے مُستویوں کو جنمیں سے سب کے سب ایک مشترک خط پر ملتے ہیں چار خطوں میں قطع کریگا جو ہم نقطہ ہونگے اور اُس پنسل کی چلیپی نسبت جو ان خطوں سے بنتی ہے مستقل ہوگی ۔

۸ ـــ ا، ب، ج، د ایک خط میں ہیں اور اس خط میں ایک نقطہ و ہے جس سے ا، ب، ج، د کے فاصلے ا، ب، ج، د ہیں اور

لہ ≡ (ا - د)(ب - ج)، مہ ≡ (ب - د)(ج - ا)، نہ ≡ (ج - د)(ا - ب)

ثابت کرو کہ اُن سعتوں کی چھ ممکن چلیپی نسبتیں جو نقطوں ا، ب، ج، د سے بن سکتی ہیں حسب ذیل ہیں

$-\frac{\text{مہ}}{\text{نہ}}$ ، $-\frac{\text{نہ}}{\text{مہ}}$ ، $-\frac{\text{نہ}}{\text{لہ}}$ ، $-\frac{\text{لہ}}{\text{نہ}}$ ، $-\frac{\text{لہ}}{\text{مہ}}$ ، $-\frac{\text{مہ}}{\text{لہ}}$

(۵۸)

چھٹا باب

منظرہ

۵۸ - **تعریف** - ایک شکل جو نقطوں ف، ق، ر، س، وغیرہ پر مشتمل ہے دوسری شکل کے ساتھ جو نقطوں فَ، قَ، رَ، سَ وغیرہ پر مشتمل ہے منظرہ میں کہلاتی ہے اگر وہ خطوط جو متناظر نقطوں کو ملاتے ہیں یعنے خطوط ف فَ، ق قَ، ر رَ وغیرہ ایک نقطہ و میں ملیں۔ نقطہ و کو منظرہ کا مرکز کہتے ہیں۔

اس تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر ایک شکل کو ایک مستوی پر یا ایک سطح پر مظلل کیا جائے تو یہ شکل اپنے ظل کے ساتھ منظرہ میں ہوگی اور ظل کا راس منظرہ کا مرکز ہوگا۔

پہلی نظر میں شاید یہ معلوم ہو کہ منظرہ کا تخیل داخل کرکے ہم نے کسی نئی چیز کا اضافہ نہیں کیا بلکہ یہ وہی مفہوم ہے جو ظل میں بیان ہو چکا ہے۔ اس لئے ان دو چیزوں کا مقابلہ کرنا بہتر ہوگا تاکہ ان کا فرق معلوم ہو جائے۔

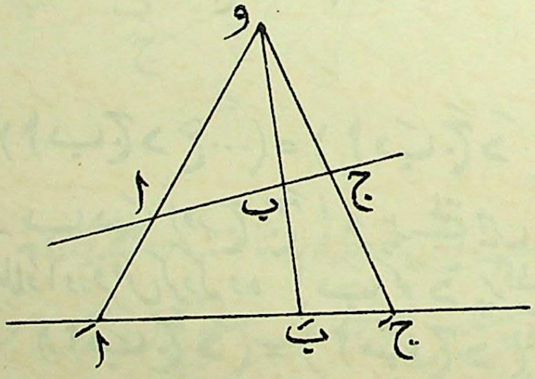
ظل میں ایک شکل ایک سطح یا مستوی پر ہوتی ہے اور اسے ہم ظل کے ایک راس کے ذریعہ دوسری سطح یا مستوی پر مظلل کرتے ہیں لیکن

منظرہ میں اُن سطحوں یا مُستویوں کا ذکر نہیں ہے جن پر یہ دو شکلیں واقع ہوتی ہیں اور صرف اس بات کی ضرورت ہے کہ متناظر نقطوں کو ملانیوالے خط ہم نقطہ ہوں ۔

پس بلاشبہ وہ دو شکلیں جنمیں سے ہر ایک دوسرے کا ظِل ہو منظرہ میں ہونگی لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ دو شکلیں جو منظرہ میں ہوں ایک دوسرے کا ظِل بھی ہوں ۔

۵۹ — منظرہ کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر نقطوں کی دو سعتیں منظرہ میں ہوں تو اِن سعتوں کے خطوط ہم مستوی ہونے چاہئیں ۔

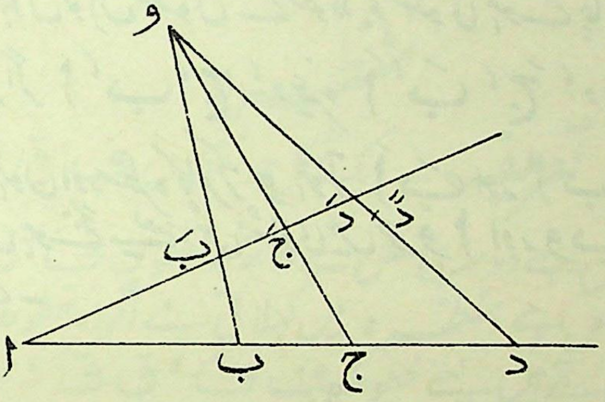
(59) کیونکہ اگر ا، ب، ج، وغیرہ اَ، بَ، جَ، وغیرہ کے ساتھ منظرہ میں ہوں اور منظرہ کا مرکز و ہو تو اَبَ اور اب ایک ہی مُستوی میں ہونگے یعنے اُس مُستوی میں جو و ا اور و ب میں سے گذرتا ہے ۔



یہ بھی ظاہر ہے کہ وہ سعتیں جو منظرہ میں ہوں ہم رسم ہوتی ہیں ۔ لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ دو ہم رسم سعتیں جو ایک ہی مُستوی میں ہوں منظرہ میں بھی ہوں ۔ مسئلہ ذیل سے یہ معلوم ہوگا کہ کِس شرط کے

تحت یہ صورت پیدا ہوگی ۔

۶۰ — مسئلہ — اگر ایک ہی مستوی میں دو ہم رسم سعتیں ایسی ہوں کہ اِن کے خطوں کا نقطہ تقاطع اِن دو سعتوں میں اپنا آپ جواب ہو تو سعتیں منظرہ میں ہونگی ۔



فرض کرو کہ (ا ب ج د ع ...) = (ا بَ جَ دَ عَ ...)

فرض کرو کہ ب بَ اور ج جَ، و پر ملتے ہیں ۔

و د کو مِلاؤ اور فرض کرو کہ وہ ا بَ کو دً پر قطع کرتا ہے ۔ (60)

اب (ا بَ جَ دَ) = (ا ب ج د)

= (ا بَ جَ دً)

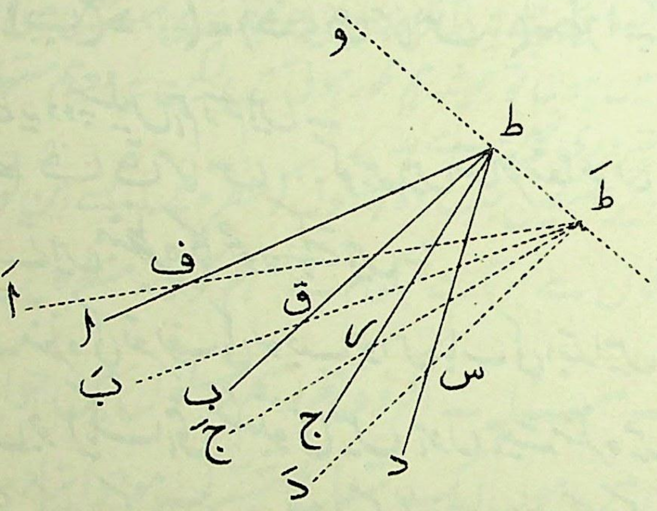
∴ دَ اور دً منطبق ہوتے ہیں (دفعہ ۵۱) ۔

پس وہ خط جو دو ہم رسم سعتوں کے کسی متناظر نقطوں کو مِلاتا ہے و میں سے گذرتا ہے اِس لئے یہ سعتیں منظرہ میں ہیں ۔

۶۱ — دو پنسلیں ط (ا، ب، ج، د ....) اور طَ (اَ، بَ، جَ...

ہماری تعریف کی بموجب منظرہ میں ہونگی جبکہ ط اور طَ منظرہ میں ہوں، ط ا میں کے نقطے طَ اَ میں کے نقطوں کے ساتھ منظرہ میں ہوں، ط ب میں کے نقطے طَ بَ میں کے نقطوں کے ساتھ منظرہ میں ہوں

اور علیٰ ہذا القیاس۔



ہم حسب ذیل مسئلہ فوراً ثابت کر سکتے ہیں۔

اگر دو پنسلیں جو مختلف مستویوں میں ہوں منظرہ میں ہوں تو وہ ایک مشترک قاطع رکھینگی اور ہم رسم ہونگی۔

فرض کرو کہ پنسلیں ط (ا، ب، ج، د، ...) اور طَ (اَ، بَ، جَ، دَ، ...) ہیں۔

فرض کرو کہ ط ا اور طَ اَ جو ہم مستوی (دفعہ ۵۹) ہیں نقطہ

ف پر ملتے ہیں، فرض کرو کہ ط ب اور طَ بَ نقطہ ق پر ملتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔

(61) نقطوں ف، ق، ر، س، .... میں سے ہر ایک پنسلوں کے دونوں مستویوں میں واقع ہے یعنے یہ نقطے ان مستویوں کے خط تقاطع میں واقع ہیں۔

پس یہ نقطے ہم خط ہیں اور چونکہ

ط(ا ب ج د ...) = (ف ق ر س ...) = طَ(اَ بَ جَ دَ ...)

اس لئے یہ دو پنسلیں ہم رسم ہیں۔

خط ف ق ر س ... کو جس میں متناظر شعاعوں کے نقاط تقاطع واقع ہوتے ہیں منظرہ کا محور کہتے ہیں۔

۶۲ — منظرہ کی تعریف کی بموجب جو اس باب کی ابتدا میں دی گئی ہے دو پنسلیں جو ایک ہی مُستوی میں ہوں ہمیشہ منظرہ میں ہونگی اگر اِن کے رأسوں کو ملانے والے خط پر کوئی نقطہ منظرہ کے مرکز کے طور پر لیا جائے۔

فرض کرو کہ متناظر شعاعوں کے نقاط تقاطع حسب دفعہ ماسبق ف، ق، ر، س وغیرہ ہیں۔

یہاں ہم ف، ق، ر، س، ... کا ہم خط ہونا ثابت نہیں کر سکتے کیونکہ فی الواقعی اِنکا ایسا ہونا ضروری نہیں ہے۔

لیکن اگر ف، ق، ر، وغیرہ ہم خط ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ پنسلیں ہم محور ہیں۔

اگر پنسلیں ہم محور ہوں تو اِن کا ہم رسم ہونا ظاہر ہے۔

۶۳ — اِس موضوع پر لکھنے والے مصنفین معمولاً یہ تعریف کرتے ہیں کہ

دو پنسلیں منظرہ میں ہونگی اگر انکی متناظر شعاعیں ہم خط نقطوں میں قطع کریں۔

اس طریقہ پر یہ اعتراض وارد ہوتا ہے کہ مختلف اغراض کے لئے منظرہ کی ایک مختلف تعریف کرنی ہوگی۔

ہم دیکھینگے کہ منظرہ کی جو تعریف ہم نے دی ہے اس پہ سختی سے قائم رہنے سے کوئی ابہام پیدا نہیں ہوگا چنانچہ ہم دو پنسلوں کو ہم محورانہ منظرہ میں کہینگے اگر انکی متناظر شعاعوں کے نقاط تقاطع ہم خط ہوں۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر دو پنسلیں جو ایک ہی مستوی میں نہ ہوں منظرہ میں ہوں تو ہمیشہ ہم محور ہوتی ہیں لیکن یہ دو ہم مستوی پنسلوں کے لئے ضروری نہیں ہے۔

دیگر مصنفین جب دو پنسلوں کو منظرہ میں کہتے ہیں تو اُن کا مطلب ایسی پنسلوں سے ہوتا ہے جنکو ہم نے "ہم محورانہ منظرہ میں" کہا ہے۔

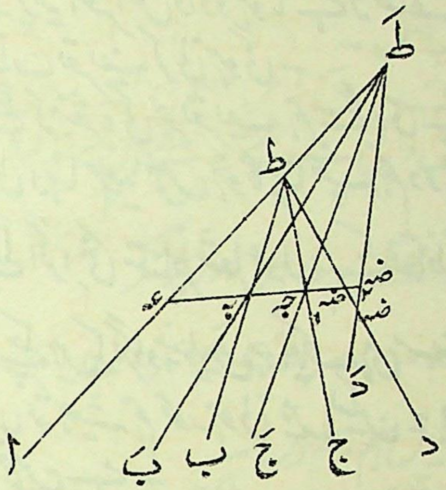
(62) ۶۲ — مسئلہ — اگر دو ہم رسم پنسلوں میں جو ایک ہی مُستوی میں ہوں ایک شعاع مشترک ہو جو اپنا آپ جواب ہو تو یہ پنسلیں ہم محورانہ منظرہ میں ہونگی۔

فرض کرو کہ پنسلیں

ط (ا، ب، ج، د ...) اور طَ (اَ، بَ، جَ، دَ، ...)

ہیں اور ان میں مشترک شعاع طَ ط ا ہے۔

فرض کرو کہ ط ب اور طَ بَ، پہ میں متقاطع ہوتے ہیں، ط ج اور طَ جَ، جہ میں، ط د اور طَ دَ، ھہ میں اور علیٰ ہذا القیاس



فرض کرو کہ جہ بہ، طَ ط ا سے عہ پر ملتا ہے اور فرض کرو کہ وہ شعاعوں ط د اور طَ دَ کو علیٰ الترتیب ضہ$_1$ اور ضہ$_2$ میں قطع کرتا ہے۔

اب چونکہ پنسلیں ہم رسم ہیں اس لئے

ط (ا ب ج د) = طَ (ا بَ جَ دَ)

∴ (عہ بہ جہ ضہ$_1$) = (عہ بہ جہ ضہ$_2$)

اس لئے ضہ$_1$ اور ضہ$_2$، ضہ پر منطبق ہوتے ہیں۔

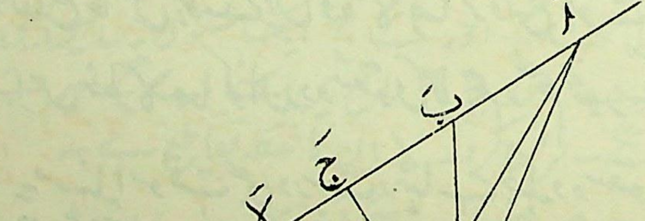
پس متناظر شعاعوں ط د اور طَ دَ کا نقطہ تقاطع خط بہ جہ پر واقع ہوتا ہے۔

اسی طرح کسی دو دوسری متناظر شعاعوں کا نقطہ تقاطع خط بہ جہ پر واقع ہوگا۔

اس لئے پنسلیں ہم محوریانہ منظرہ میں ہیں ۔

(63) ۶۵ ۔ مسئلہ ۔ اگر اب ج ... اور اَبَ جَ ...
وہ ہم مستوی اور ہم رسم سعتیں ہوں جنمیں کوئی مشترک متناظر
نقطہ نہیں ہے تو متناظر نقطوں کے دو دو زوجوں کو (یعنی
ابَ اور اَب) چلیپی طریقہ پر ملانے سے جو نقاط تقاطع
حاصل ہوتے ہیں وہ سب ہم خط ہوں گے ۔

فرض کرو کہ سعتوں کے خطوط ف پر متقاطع ہوتے ہیں ۔
اب بموجب فرض ف اِن دو سعتوں میں ایک متناظر نقطہ نہیں ہے
بہتر ہو گا کہ ہم ف کو دو حرفوں لا اور ما سے تعبیر کریں،
لا اسوقت جبکہ وہ سعت اب ج ... سے متعلق ہو اور ما
اسوقت جبکہ وہ سعت اَبَ جَ ... سے متعلق ہو ۔



فرض کرو کہ لاَ، سعت اَبَ جَ... کا وہ نقطہ ہے جو دوسری سعت اب ج... کے نقطہ لا کے متناظر ہے اور فرض کرو کہ ماَ سعت اب ج... کا وہ نقطہ ہے جو سعت اَبَ جَ... کے نقطہ ما کے متناظر ہے۔

اب (اب ج لا ما...) = (اَبَ جَ لاَ ماَ...)

∴ اَ(اب ج لا ما...) = ا(اَبَ جَ لاَ ماَ...)

یہ دو پنسلیں ایک مشترک شعاع اَا رکھتی ہیں، اس لیے حسب مسئلہ دفعہ ماسبق اِنکی متناظر شعاعوں کے نقاط تقاطع ہم خط ہیں یعنی

اَب، ابَ، اَج، اجَ، اَلا، الاَ، اَما، اماَ

اور علیٰ ہذا القیاس۔

اس سے یہ معلوم ہوگا کہ ا اور اَ کو ب اور بَ کے ساتھ، ج اور جَ کے ساتھ، اور علیٰ ہذا القیاس چلیپی طور پر ملانے سے جو نقاط تقاطع حاصل ہوتے ہیں اُن کا طریق خط لاَما ہے۔

(64) اسی طرح متناظر نقطوں کے کسی دو زوجوں کو چلیپی طور پر ملانے سے جو نقاط تقاطع حاصل ہوتے ہیں وہ لاَما پر واقع ہونگے۔

اِس خط لاَما کو ان دو سعتوں کا ہم رسم محور کہتے ہیں۔

یہ مسئلہ اسوقت بھی درست رہتا ہے جبکہ دو سعتوں میں ایک مشترک متناظر نقطہ ہو۔ اس کا ثبوت طالب علم پر چھوڑ دیا جاتا ہے۔

۶۶ — اِس باب میں بتلائے ہوئے طریقوں پر مشق کی خاطر طالب علم یہ ثابت کرے کہ اگر

ط(ا، ب، ج، ...) اور طَ(اَ، بَ، جَ، ...)

دو ہم رسم ہم مستوی پنسلیں ہیں جنمیں کوئی مشترک متناظر شعاع نہیں ہے اور اگر ہم ط ف اور طَ ق کے اور ط قَ اور طَ فَ کے نقاط تقاطع لیں (ط ف، طَ فَ اور ط ق، طَ قَ متناظر خطوں کے کوئی دو زوج ہیں) اور انہیں ملائیں تو وہ تمام خطوط جو اس طرح حاصل ہونگے ہم نقطہ ہونگے۔

جب ہم مکافات (Reciprocation.) پر پہنچینگے تو یہ معلوم ہوگا کہ یہ مسئلہ دفعہ ۶۵ کے مسئلہ سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔

مثلثات منظرہ میں

۶۷ — مسئلہ۔ اگر دو مثلثوں کے راس منظرہ میں ہوں تو انکے متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع ہم خط ہوں گے اور اس کے برعکس۔

(۱) فرض کرو کہ مثلث مختلف مستویوں میں ہیں۔

فرض کرو کہ مثلثوں اب ج اور اَ بَ جَ کے منظرہ کا مرکز و ہے چونکہ ب ج اور بَ جَ ایک مستوی میں ہیں یعنی اُس مستوی میں جسمیں و ب اور و ج واقع ہیں اسلئے ب ج اور بَ جَ متقاطع ہونگے۔ فرض کرو کہ لا ان کا نقطہ تقاطع ہے۔

اسی طرح ج ا اور جَ اَ (نقطہ ما پر) اور اب اور اَ بَ (نقطہ ے پر) متقاطع ہونگے۔

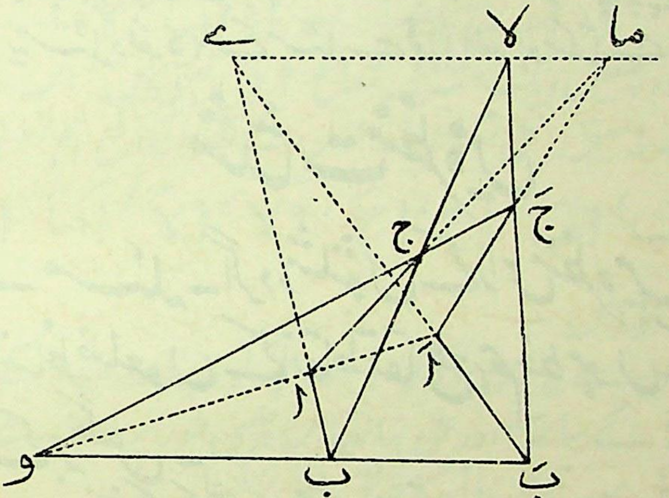
اب نقطے لا، ما، ے، مثلثوں اب ج اور اَ بَ جَ دونوں کے مستویوں میں ہیں۔

اس لئے وہ ان مستویوں کے خط تقاطع پر واقع ہیں۔

اس طرح ہمارے مسئلہ کا پہلا حصہ ثابت ہوچکا۔

(65) پھر فرض کرو کہ مثلثات ا ب ج اور اَ بَ جَ ایسے ہیں کہ متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع (لا، ما، ے) ہم خط ہیں۔

چونکہ ب ج اور بَ جَ ملتے ہیں اس لئے وہ ہم مستوی ہیں اور علیٰ ہذا ضلعوں کے دوسرے زوجوں کے لئے۔



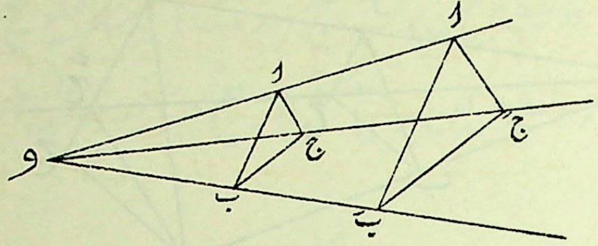
اس طرح تین مستوی ب ج جَ بَ، ج ا اَ جَ، ا ب بَ اَ حاصل ہوتے ہیں جنکے خطوط تقاطع ا اَ، ب بَ، ج جَ ہیں۔

لیکن یہ تین مستوی ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

اس لئے ا اَ، بَ ب، ج جَ ہم نقطہ ہیں یعنی مثلثات منظرہ میں ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ مثلثات ایک ہی مستوی میں ہیں۔

اول انہیں منظرہ میں فرض کرو جسکا مرکز و ہے ۔



فرض کرو کہ حسب سابق متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع لا ، ما ، ے ہیں ۔

شکل کو اس طور پر مظلل کرو کہ لا ما لاتناہی پر مظلل ہو جائے ۔ مختلف نقطوں کے ظلوں کو متناظر چھوٹے حرفوں سے تعبیر کرو ۔ (66)

اب

و ب : و بَ = و ج : و جَ کیونکہ ب ج ، بَ جَ کے متوازی ہے

= و ا : و اَ کیونکہ ج ا ، جَ اَ کے متوازی ہے

∴ ا ب ، اَ بَ کے متوازی ہے ۔

∴ ی بھی لاتناہی پہ ہے ۔

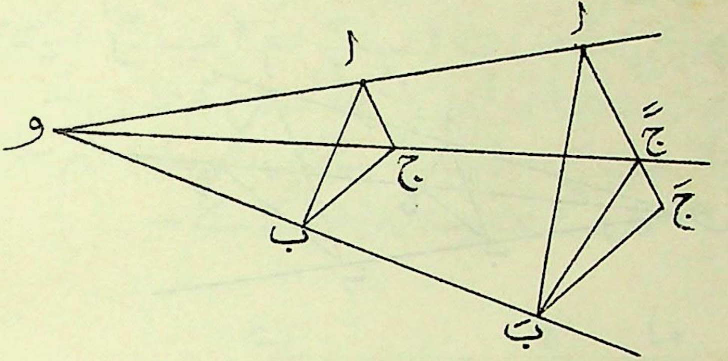
یعنے لا ، ما ، ی ہم خط ہیں ۔

∴ لا ، ما ، ے ہم خط ہیں ۔

پھر فرض کرو کہ لا ، ما ، ے ہم خط ہیں ۔ ہم ثابت کرینگے کہ مثلثات منظرہ میں ہیں ۔

فرض کرو کہ ا اَ اور ب بَ ، و پر ملتے ہیں ۔

و ج کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ اَ جَ سے جً پر ملتا ہے ۔



تو مثلثات اب ج اور اَبَ جً منظرہ میں ہونگے۔

∴ ب ج اور بَ جً کا نقطہ تقاطع خط ماے پر واقع ہے۔

لیکن بموجب فرض ب ج اور بَ جَ خط ماے سے نقطہ لا پر ملتے ہیں۔

∴ بَ جً اور بَ جَ ایک ہی خط میں ہیں۔

یعنے جً ، جَ پر منطبق ہوتا ہے۔

اس طرح اب ج اور اَبَ جَ منظرہ میں ہیں۔

۶۸ ۔ مسئلہ ۔ ضروری اور کافی شرط کہ ہم مستوی مثلث اب ج ، اَبَ جَ منظرہ میں ہوں یہ ہے کہ

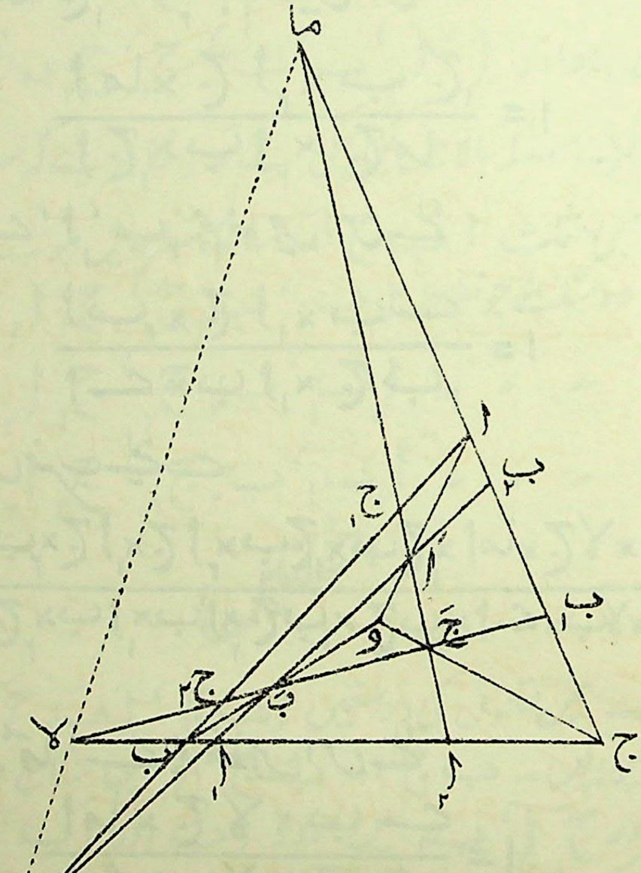
اب$_1$ × اب$_2$ × ج ا$_1$ × ج ا$_2$ × ب ج$_1$ × ب ج$_2$

= اج$_1$ × اج$_2$ × ب ا$_1$ × ب ا$_2$ × ج ب$_1$ × ج ب$_2$

جہاں $ا_1$، $ا_2$ وہ نقطے ہیں جن پر اَبَ اور اَجَ غیر متناظر ضلع ب ج سے ملتے ہیں (67)

$ب_1$، $ب_2$ وہ نقطے ہیں جن پر بَجَ اور بَاَ غیر متناظر ضلع ج ا سے ملتے ہیں

$ج_1$، $ج_2$ وہ نقطے ہیں جن پر جَاَ اور جَبَ غیر متناظر ضلع ا ب سے ملتے ہیں



اول فرض کرو کہ مثلث منظرہ میں ہیں۔ فرض کرو کہ منظرہ کا محور

لا ما ے ہے ۔ (68)

اب چونکہ لا، ب۱، ج۲ ہم خط ہیں اسلئے

$$\frac{\text{اب}_1 \times \text{ج لا} \times \text{ب ج}_2}{\text{اج}_2 \times \text{ب لا} \times \text{ج ب}_1} = 1$$

اور چونکہ ما، ج۱، ا۲ ہم خط ہیں اس لئے

$$\frac{\text{اما} \times \text{ج ا}_2 \times \text{ب ج}_1}{\text{اج}_1 \times \text{ب ا}_2 \times \text{ج ما}} = 1$$

اور چونکہ ے، ا۱، ب۲ ہم خط ہیں اس لئے

$$\frac{\text{اب}_2 \times \text{ج ا}_1 \times \text{ب ے}}{\text{اے} \times \text{ب ا}_1 \times \text{ج ب}_2} = 1$$

ان کا حاصل ضرب لینے سے

$$\frac{\text{اب}_1 \times \text{اب}_2 \times \text{ج ا}_1 \times \text{ج ا}_2 \times \text{ب ج}_1 \times \text{ب ج}_2 \times \text{اما} \times \text{ج لا} \times \text{ب ے}}{\text{اج}_1 \times \text{اج}_2 \times \text{ب ا}_1 \times \text{ب ا}_2 \times \text{ج ب}_1 \times \text{ج ب}_2 \times \text{اے} \times \text{ب لا} \times \text{ج ما}} = 1$$

لیکن لا، ما، ے ہم خط ہیں اس لئے

$$\frac{\text{اما} \times \text{ج لا} \times \text{ب ے}}{\text{اے} \times \text{ب لا} \times \text{ج ما}} = 1$$

$$\therefore \text{اب}_1 \times \text{اب}_2 \times \text{ج ا}_1 \times \text{ج ا}_2 \times \text{ب ج}_1 \times \text{ب ج}_2$$

$$= \text{اج}_1 \times \text{اج}_2 \times \text{ب ا}_1 \times \text{ب ا}_2 \times \text{ج ب}_1 \times \text{ج ب}_2$$

پھر ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ شرط کافی بھی ہے، کیونکہ اس سے یہ لازم آتا ہے کہ

$$\frac{\text{ا ما × ج لا × ب ے}}{\text{ا ے × ب لا × ج ما}} = ۱$$

∴ لا، ما، ے ہم خط ہیں اور مثلث منظرہ میں ہیں۔

نتیجہ صریح — اگر مثلث اب ج، مثلث اَبَ جَ کے ساتھ منظرہ میں ہو اور ا$_1$، ا$_2$، ب$_1$، ب$_2$، ج$_1$، ج$_2$ وہ نقطے ہوں جنکی تعریف مسئلہ بالا میں کیجا چکی ہے تو یہ ظاہر ہے کہ حسب ذیل تین مثلث بھی مثلث اب ج کے ساتھ منظرہ میں ہونے چاہئیں:—

(۱) وہ مثلث جو خطوط ا$_1$ب$_2$، ب$_1$ج$_1$، ج$_2$ا$_2$ سے بنتا ہے

(۲) " " " " ا$_1$ب$_1$، ب$_2$ج$_2$، ج$_1$ا$_2$ " "

(۳) " " " " ا$_1$ب$_1$، ب$_2$ج$_1$، ج$_2$ا$_2$ " "

(69)

مشقیں

۱— تین نقطوں کی دو سقیں اب ج، اَبَ جَ ایک ہی مستوی میں ہیں۔ ب جَ اور بَ ج، ا$_1$ میں متقاطع ہوتے ہیں، ج اَ اور جَ ا، ب$_1$ میں، اور ا بَ اور اَ ب، ج$_1$ میں۔ ثابت کرو کہ ا$_1$، ب$_1$، ج$_1$ ہم خط ہیں۔

۲— اب ج، اَبَ جَ دو ہم مستوی مثلث منظرہ میں ہیں، منظرہ کا مرکز و ہے۔ و میں سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو مثلثوں کے مستوی میں نہیں ہے۔ اس خط پر کوئی دو نقطے س اور سَ ہیں۔

ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج مرکز س کے ذریعہ اور مثلث اَ بَ جَ مرکز سَ کے ذریعہ ایک مشترک مثلث کے ساتھ منظرہ میں ہیں۔

۳ — یہ مانکر کہ دو غیر ہم مُستوی مثلث جو منظرہ میں ہوں ہم محور ہوتے ہیں مثال ۲ کے ذریعہ ثابت کرو کہ دو ہم مُستوی مثلث بھی جو منظرہ میں ہوں ہم محور ہوتے ہیں۔

۴ — اگر دو مثلث ا ب ج ، اَ بَ جَ منظرہ میں ہوں اور اگر ب جَ اور بَ ج ، ا$_1$ میں متقاطع ہوں ، جَ اَ اور ج اَ ، ب$_1$ میں اور اَ بَ اور اَ ب ، ج$_1$ میں تو مثلث ا$_1$ ب$_1$ ج$_1$ دئے ہوئے مثلثوں میں سے ہر ایک کے ساتھ منظرہ میں ہوگا اور یہ تینوں مثلث منظرہ کا ایک مشترک محور رکھینگے۔

۵ — جب تین مثلثوں میں سے ہر دو منظرہ میں ہوتے ہیں اور ان کا منظرہ کا محور ایک ہی ہوتا ہے تو انکے منظرہ کے تین مرکز ہم خط ہوتے ہیں۔

۶ — نقطے ق اور ر ، خط مستقیم ا ج پر واقع ہیں اور نقطہ ط ، خط مستقیم ا د پر واقع ہے۔ ط ق ، خط مستقیم ا ب سے ے پر ملتا ہے اور ط ر ، ا ب سے ما پر ملتا ہے۔ لا ، ا ب پر دوسرا نقطہ ہے۔ لا ق ، ا د سے ع پر ملتا ہے اور لا ر ، ا د سے و پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ما ع ، ے و ، ا ج ہم نقطہ ہیں۔

۷ — ضروری اور کافی شرط کہ ہم مُستوی مثلث ا ب ج ، اَ بَ جَ منظرہ میں ہوں یہ ہے کہ

اَ بَ × ب جَ × ج اَ = ا جَ × ب اَ × ج بَ

جہاں اَ ، بَ ، جَ ، مثلث اَ بَ جَ کے اُن ضلعوں کو تعبیر کرتے ہیں جو علی الترتیب اَ ، بَ ، جَ کے مقابل ہیں اور ا بَ اُس عمود کو تعبیر کرتا ہے جو ا سے بَ پر کھینچا گیا ہے۔

[فرض کرو کہ بَ جَ اور ب ج ، لا میں ملتے ہیں، جَ اَ اور ج ا ، ما میں؛ اَبَ اور اب ، ے میں۔ دی ہوئی شرط اس بات کو بتلاتی ہے کہ لا، ما، ے ہم خط ہیں۔]

(70) ۸ — ثابت کرو کہ مثلثوں اب ج اور اَبَ جَ کے منظرہ میں ہونے کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ

$$\frac{\text{جب ابَ جَ جب اب اَجبِ ب جَ اَجیب جَ بَ جیب جَ ابَ جیب جَ اجَ}}{\text{جب اجَ بَ جیب اجَ اَجیب جَ ب اَجیب جَ ب جَ جیب ب اجَ جیب ب ابَ}} = ۱$$

[اسے لاکلان کی ماڈرن پیور جیومٹری میں ثابت کیا گیا ہے۔ اس شرط کو ثابت کرنے کے لئے خود طالب علم کے پاس کافی مواد ہے۔ چنانچہ وہ دفعہ ۳۶ کے نتیجہ صریح کی طرف رجوع ہو اور و کو باری باری سے اَ پر، بَ پر، جَ پر اور منظرہ کے مرکز پر لے۔ نتیجہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوگا۔ یہ یاد رکھنا مشکل بھی نہیں ہے اگر طالب علم اس اصول کو سمجھ چکا ہے جس کے ذریعہ یہ تمام ضابطے جو ایک مثلث کے ضلعوں پر کے نقطوں سے متعلق ہیں بہترین طریقہ پر ذہن میں رہ سکتے ہیں یعنے مثلث کے گرد دو مخالف سمتوں (۱) اب، ب ج، ج ا (۲) اج، ج ب، ب ا میں چلنے کا اصول]

۹ — دو مثلث جو ایک ہی مستوی میں منظرہ میں ہوں متساوی الاضلاع مثلثوں میں مُظلل کئے جا سکتے ہیں۔

۱۰ — ا ب ج ایک مثلث ہے اور ا، ب، ج کے مقابل اسکے جانبی مرکز علی الترتیب ع$_1$، ع$_2$، ع$_3$ ہیں۔ ع$_2$ع$_3$، ب ج سے ا$_1$ پر ملتا ہے؛ ع$_3$ع$_1$، ج ا سے ب$_1$ پر ملتا ہے؛ اور ع$_1$ع$_2$، اب سے ج$_1$ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا$_1$، ب$_1$، ج$_1$ ہم خط ہیں۔

۱۱۔ اگر اد، ب ع، ج ف اور اَدَ، بَ عَ، جَ فَ
ہم نقطہ خطوں کے دو جٹ ہوں جو ایک مثلث اب ج کے راسوں
میں سے کھینچے گئے ہیں اور جو متقابلہ اضلاع سے د، ع، ف اور دَ،
عَ، فَ پر ملتے ہیں، اور اگر ع ف اور عَ فَ، لا میں متقاطع
ہوں، ف د اور فَ دَ، ما میں اور د ع اور دَ عَ، ے
میں تو مثلث لا ما ے، مثلثوں اب ج، د ع ف، دَ عَ فَ
میں سے ہر ایک کے ساتھ منظرہ میں ہوگا۔
[مثلث کو اس طور پر متظلل کرو کہ ظِل میں اد، ب ع، ج ف
عمود اور اَدَ، بَ عَ، جَ فَ خطوط وسطی ہو جائیں۔ پھر
مثال ۷، استعمال کرو۔]

* * *

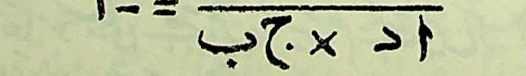
(71)

ساتواں باب

موسیقی تراش

۶۹ — **تعریف** — چار ہم خط نقطے ا، ب، ج، د موسیقی سعت بنائینگے اگر

$$(\text{اب جد}) = -۱$$



اس صورت میں

$$\frac{\text{اب} \times \text{جد}}{\text{اد} \times \text{جب}} = -۱$$

$$\therefore \frac{\text{اب}}{\text{اد}} = -\frac{\text{اب} - \text{اج}}{\text{اد} - \text{اج}} = \frac{\text{اب} - \text{اج}}{\text{اج} - \text{اد}}$$

یعنی اج، اب اور اد کے درمیان اوسطِ موسیقی ہے۔

(دفعہ ۵۰)

اب چار نقطوں کی کسی سعت کی چوبیس چلیپی نسبتوں کی جدول کی طرف رجوع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر (ا ب ج د) = -۱ تو حسب ذیل تمام چلیپی نسبتیں = -۱

(ا ب ج د)، (ب ا د ج)، (ج د ا ب)، (د ج ب ا)

(ا د ج ب)، (ب ج د ا)، (ج ب ا د)، (د ا ب ج)

پس نہ صرف ا ج، ا ب اور ا د کے درمیان موسیقی اوسط ہے بلکہ

ب د بھی ب ا اور ب ج کے درمیان اوسط موسیقی ہے،
د ب " د ج اور د ا " "
ج ا " ج ب اور ج د " "

اس لئے ہم ا اور ج کو ب اور د کے موسیقی مزدوج کہینگے اور اس واقعہ کو علامتوں میں اس طرح ظاہر کرینگے

(ا ج، ب د) = -۱

اس کا مطلب یہ ہے کہ وہ آٹھ چلیپی نسبتیں جو اوپر دی گئی ہیں اور جنمیں ا اور ج متبادل ارکان ہیں اور ب اور د متبادل ارکان ہیں -۱ کے مساوی ہیں۔ (72)

جب (ا ج، ب د) = -۱ تو ہم بعض اوقات د کو ا، ب اور ج کا چوتھا موسیقی کہتے ہیں، نیز ہم کہتے ہیں کہ ا ج، ب اور د پر موسیقی نسبت میں تقسیم ہوا ہے اور ب د، ا اور ج پر موسیقی نسبت میں تقسیم ہوا ہے۔ یا ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ ب اور د کے لحاظ سے ج، ا کا موسیقی طور پر فردوج ہے۔

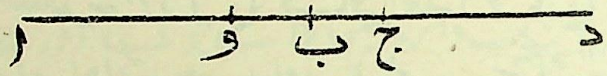
چار شعاعوں کی ایک پنسل پ (ا، ب، ج، د) موسیقی کہلاتی ہے جبکہ ایک قاطع کے ساتھ اس کی شعاعوں کے نقاط تقاطع

ایک موسیقی سعت بنائیں۔

طالب علم خود یہ آسانی سے ثابت کرسکتا ہے کہ کسی زاوئے کے اندرونی اور بیرونی ناصف اور زاوئے کی ساقیں باہم موسیقی پنسل بناتی ہیں

۷۰۔ مسئلہ۔ اگر (ا ج، ب د) = -۱ اور ا ج کا نقطہ وسطی و ہو تو

وب × ود = وج^{۲} = وا^{۲}



چونکہ (ا ب ج د) = -۱

∴ اب × ج د = - ا د × ج ب

مبداء و داخل کرو تو

(وب - وا)(ود - وج) = -(ود - وا)(وب - وج)

لیکن وا = - وج

∴ (وب + وج)(ود - وج) = -(ود - وج)(وب - وج)

∴ وب × ود + وج × ود - وب × وج - وج^{۲}

= - ود × وب + وج × ود - وب × وج + وج^{۲}

∴ ۲ وب × ود = ۲ وج^{۲}

∴ وب × ود = وج^{۲} = او^{۲} = وا^{۲}

اسی طرح اگر وَ، ب د کا نقطۂ وسطی ہو تو

وَج × وَا = وَب^{۲} = وَد^{۲}

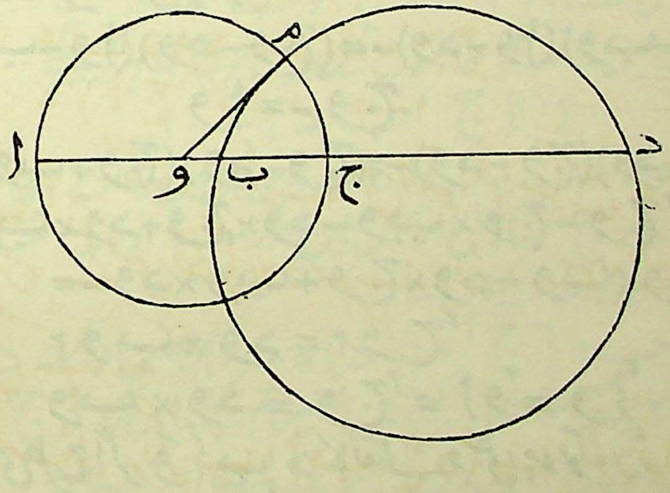
نتیجہ صریح ۱۔ اس مسئلہ کا عکس بھی درست ہے یعنی اگر ا ب ج د ایک سعت ہو اور ا ج کا نقطہ وسطی و ہو اور وج^{۲} = وب × ود تو

(ا ج، ب د) = -۱

یہ نتیجہ اوپر کے جبری عمل کو الٹا کرنے سے حاصل ہو جائیگا۔

نتیجہ صریح ۲ - اگر تین نقطے ا، ب، ج ایک خط میں دئے گئے ہوں اور اس خط میں ایک چوتھا نقطہ د ایسا معلوم کرنا ہو کہ (اب، ج د) = -۱ تو اب پر اسے قطر مانکر ایک دائرہ کھینچو تو د، ج کا مقلوب نقطہ ہوگا۔ (179)

۱۷ - مسئلہ - اگر (ا ج، ب د) = -۱ تو ا ج پر اسکو قطر مانکر کھینچا ہوا دائرہ ب اور د میں سے گذرنیوالے ہر دائرہ کو علی القوائم قطع کریگا۔



فرض کرو کہ ا ج کا وسطی نقطہ و ہے اور اس لئے و، ا ج پر کے دائرہ کا مرکز ہے۔

فرض کرو کہ یہ دائرہ، ب اور د میں سے گذرنیوالے کسی دائرہ کو

م پر قطع کرتا ہے تو گزشتہ مسئلہ کے رو سے

وب × ود = وج^{۲} = وم^{۲}

اس لئے وم، دائرہ ب م د کا ایک مماس ہے، اس لئے دائرے علی القوائم قطع ہوتے ہیں ۔

اسی طرح ا ب د پر کا دائرہ، ا اور ج میں سے گذرنیوالے ہر دائرہ کو علی القوائم قطع کریگا ۔

نتیجۂ صریح ۱ ـ اگر ا ب ج د ایک سعت ہو اور اگر ا ج کو قطر مانکر اس پر ایک دائرہ کھینچا جائے جو ب اور د میں سے گذرنیوالے کسی ایک دائرہ کو علی القوائم قطع کرے تو

(ا ج، ب د) = -۱

کیونکہ اوپر کی شکل استعمال کرنے سے

وب × ود = وم^{۲} = وج^{۲}

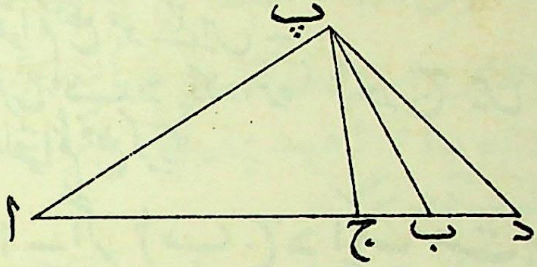
∴ (ا ج ب د) = -۱

نتیجۂ صریح ۲ ـ اگر دو دائرے علی القوائم متقاطع ہوں تو ایک دائرہ کے کسی قطر کی دوسرے دائرہ سے موسیقی طور پر تقسیم ہوتی ہے ۔

۷۲ ـ مسئلہ ـ اگر پ (ا ب، ج د) = -۱ اور زاویہ (74)
ا پ ب قائمہ ہو تو پ ا اور پ ب، ان زاویوں کے ناصف ہونگے جو پ ج اور پ د کے درمیان ہیں ۔

فرض کرو کہ موسیقی پنسل کی شعاعوں پ ا، پ ب، پ ج، پ د

کو کوئی قاطع خط نقطوں ا، ب، ج، د پر قطع کرتا ہے۔



اب چونکہ (ا ب، ج د) = -۱

$$\therefore \quad \frac{\text{ا ج × ب د}}{\text{ا د × ب ج}} = -\text{۱}$$

∴ ا ج : ا د = ج ب : ب د

∴ چونکہ پ اس دائرہ پر واقع ہے جسکا قطر ا پ ہے

اس لئے دفعہ ۷۲ کی رو سے

پ ج : پ د = ج ب : ب د = ا ج : ا د

∴ پ ا اور پ ب، زاویہ ج پ د کے ناصف ہیں۔

۷۳ - مسئلہ - اگر ایک دائرہ کے ایک وتر ف ق پر دائرہ کے لحاظ سے دو مزدوج نقطے ا اور اَ لئے جائیں تو

(ف ق، ا اَ) = -۱

ا میں سے قطر ج د کھینچو جو ا کے قطبی کو جس پر اَ واقع ہے ل پر قطع کرے

فرض کرو کہ مرکز و ہے۔

اب قطبی کی خاصیت سے

ول × وا = وج^{2}

∴ (ج د، ل ا) = -۱

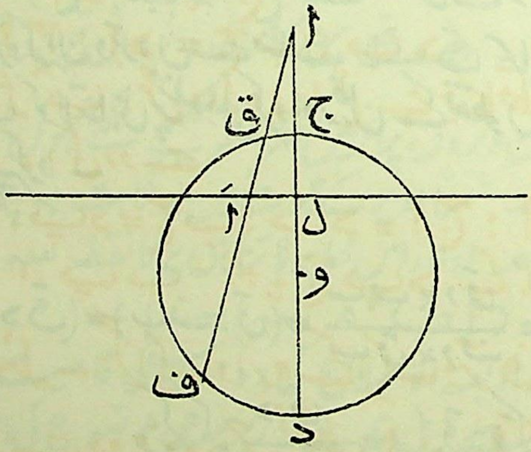
اس لئے ج د پر کا دائرہ (یعنی دیا ہوا دائرہ) ا اور ل میں سے گذرنیوالے ہر دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے (دفعہ ۱۷)۔

لیکن وہ دائرہ جسکا ایک قطر ا اَ ہے ا اور ل میں سے گذرتا ہے۔

اس لئے دیا ہوا دائرہ اِس دائرہ کو جسکا ایک قطر ا اَ ہے علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(75) لیکن دیا ہوا دائرہ ف اور ق میں سے گذرتا ہے، اسلئے

(ف ق، ا اَ) = -۱



دائرہ کی یہ موسیقی خاصیت بہت اہم اور فائدہ مند ہے۔ اسے دوسرے طریقہ سے اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے:

ایک نقطہ ا میں سے گذرنیوالے ایک دائرہ کے کسی وتر کی ا پر اور اُس نقطہ پر جو وتر اور ا کے قطبی کا نقطہ تقاطع ہے

موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتی ہے۔

۴۷ ۔ مسئلہ۔ کسی مستوی ذو اربعۃ الاضلاع کے تین وتروں میں سے ہر ایک کی دوسرے دو وتروں سے موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ اب، ب ج، ج د، د ا ذو اربعۃ الاضلاع کے چار خطوط ہیں اور نقاط ا، ب، ج، د، ع، ف اس کے چھ راس ہیں یعنے وہ نقاط تقاطع ہیں جو اس کے خطوں میں سے دو دو کو لینے پر حاصل ہوتے ہیں۔

پس اج، ب د، ع ف اس کے وتر ہیں۔

فرض کرو کہ ان وتروں سے مثلث ف ق ر بنتا ہے۔

ع ف کو لاتناہی پر منطبق کرو اور نقل کے نقطوں کو متناظر چھوٹے حرفوں سے تعبیر کرو۔

اب

$$(\text{ب ف د ق}) = (\text{ب ف د ق}) = \frac{\text{ب ف} \times \text{د ق}}{\text{ب ق} \times \text{د ف}} = \frac{\text{ب ف}}{\text{د ف}}$$

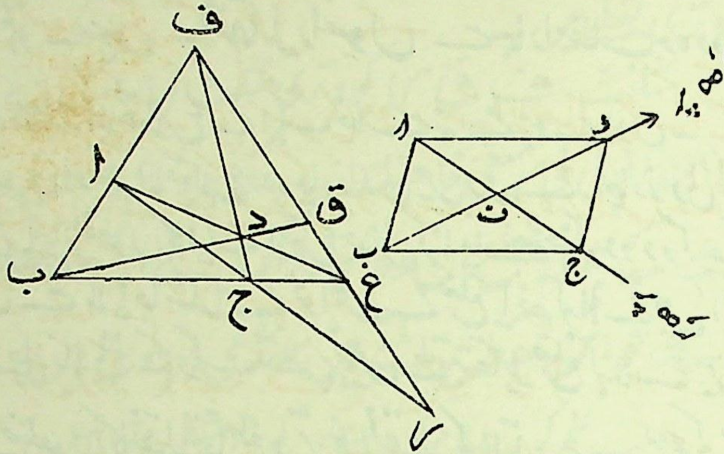
$$\left(\text{کیونکہ } \frac{\text{د ق}}{\text{ب ق}} = \text{۱، ق چونکہ } \infty \text{ پہ ہے}\right)$$

$$= -\text{۱}$$

$$\text{اسی طرح } (\text{ا ف ج ر}) = -\text{۱}$$

$$\text{نیز } (\text{ف ق ع ر}) = \text{ب}(\text{ف ق ع ر})$$
$$= (\text{ا ف ج ر}) = -\text{۱}$$

(76)



اس طرح ثابت ہو چکا کہ

(اج، فر) =-ا (ب د، ف ق) =-ا (ع ف، قر) =-ا

نتیجہ صریح۔ ف ق ر کا محیط دائرہ اُن تین دائروں کو علی القوائم قطع کریگا جو تین وتروں پر انہیں قطر مانکر کھینچے گئے ہوں۔

نوٹ۔ ضمناً اوپر کے ثبوت میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر اب کا نقطہ وسطی مہ ہو اور اس خط پر لاتناہی پر کا نقطہ سہ ہو تو

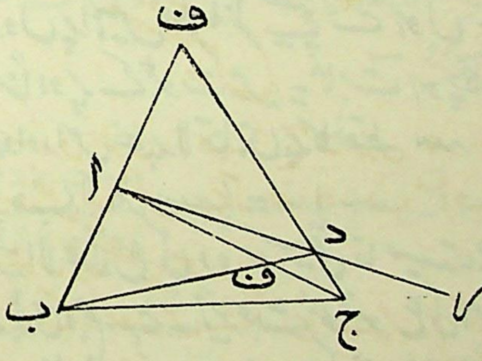
(اب، مہ سہ) =-ا۔

۷۵۔ ذوا ربعۃ الاضلاع کی وہ موسیقی خاصیت جو گذشتہ دفعہ میں ثابت کیجا چکی ہے بڑی اہم ہے۔ زیر بحث موضوع کی اس منزل پر یہ بھی ضروری ہے کہ طالب علم ذوا ربعۃ الاضلاع کو "بیانیہ" نکتہ نگاہ سے دیکھنا سیکھے کیونکہ "بیانیہ علم ہندسہ" میں ذوا ربعۃ الاضلاع کو ایک بند شکل نہیں خیال کیا جاتا جس میں ایک رقبہ گھرا ہوا ہو بلکہ اسے ایک مستوی میں چار خطوں کا اجتماع سمجھا جاتا ہے جو دو دو کرکے چھ نقطوں پر ملتے ہیں جنکو راس کہتے ہیں، اور وتر وہ تین خط ہیں جو اُن راسوں کو

ملانے سے حاصل ہوتے ہیں جو پہلے ہی ذوار بعتہ الاضلاع کے خطوں سے نہ ملے ہوئے ہوں۔ **متقابلہ راسوں** سے ہمارا مطلب وہ دو راس ہیں جو ذوار بعتہ الاضلاع کے ایک خط سے نہ ملے ہوئے ہوں۔

۷۶ — ذوار بعتہ الاضلاع اور چارزاوئی میں فرق ہے۔ چارزاوئی کو ایک مستوی میں چار نقطوں کا ایک اجتماع خیال کرنا چاہئے جنکو دو دو کر کے چھہ خطوں سے ملایا جا سکتا ہے جو اس کے ضلع یا خط کہلاتے ہیں، انمیں سے دو ضلع جو چارزاوئی کے ایک نقطہ پر نہیں ملتے متقابلہ ضلع کہلاتے ہیں۔ دو متقابلہ ضلعوں کا نقطہ تقاطع **وتری نقطہ** کہلاتا ہے۔ یہ نام کچھ زیادہ موزوں نہیں لیکن اسکو ذوار بعتہ الاضلاع کی مشابہت کے لحاظ سے تجویز کیا گیا ہے۔

ہم حسب ذیل شکل میں چارزاوئی کے اہم اجزا دکھاتے ہیں۔



اب ج د چارزاوئی ہے۔ اس کے ضلع اب، ب ج، ج د، د ا، ا ج اور ب د ہیں۔
اب اور ج د، ا ج اور ب د، ا د اور ب ج

متقابلہ اضلاع ہیں اور نقطے ف، ق، ر جہاں یہ متقاطع ہوتے ہیں وتری نقطے ہیں۔

مثلث ف ق ر کو وتری مثلث کہا جا سکتا ہے۔

چارزاوئی کی موسیقی خاصیت یہ ہے کہ ہر وتری نقطہ پر وتری مثلث کے جو دو ضلع ہیں وہ، چارزاوئی کے ان دو ضلعوں کے لحاظ سے جو اس نقطہ پر ملتے ہیں موسیقی مزدوج ہیں۔

طالب علم کو یہ معلوم کر لینے میں کوئی مشکل پیش نہیں آئے گی کہ چارزاوئی کی یہ موسیقی خاصیت ذواربعۃ الاضلاع کی موسیقی خاصیت سے جو دفعہ ۴۲ میں ثابت کیجا چکی ہے اخذ کیجا سکتی ہے۔

اس موسیقی خاصیت کی بنا پر اس وتری مثلث کو جو چارزاوئی سے متعلق ہو موسیقی مثلث بھی کہا گیا ہے۔

(78)

مشقیں

۱۔ اگر دو ہم سُتوی خطوں اب، ج د میں م اور ن دو نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ ایسا ظل لینا ممکن ہے کہ م اور ن، اب اور ج د کے ظلوں کے وسطی نقطوں میں منظلل ہوں۔

۲۔ ایک مثلث کے راسوں میں سے گذرنے والے تین ہم نقطہ خطوط ا ا$_{1}$، ب ب$_{1}$، ج ج$_{1}$ ہیں جو متقابلہ اضلاع سے نقطوں ا$_{1}$، ب$_{1}$، ج$_{1}$ پر ملتے ہیں۔ ب$_{1}$ ج$_{1}$، ب ج سے ا$_{2}$ پر ملتا ہے اور ج$_{1}$ ا$_{1}$، ج ا سے ب$_{2}$ پر ملتا ہے اور ا$_{1}$ ب$_{1}$، ا ب سے ج$_{2}$ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ
(ب ج، ا ا$_{2}$) =-۱، (ج ا، ب ب$_{2}$) =-۱، (ا ب، ج ج$_{2}$) =-

۳ ـ ثابت کرو کہ دو دائرے جو خطوط ا١ ا٢، ب١ ب٢، ج١ ج٢ پر (جنکی تعریف مثال ۲ میں ہو چکی ہے) انہیں قطر مانکر کھینچے گئے ہوں ہم محور ہیں [ا١ ا٢، ب١ ب٢ پر کے دائروں کا ایک نقطہ تقاطع ف لو اور ثابت کرو کہ ج١ ج٢ کے محاذی ف پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔ مثال ۲ اور دفعہ ۷، ۲ استعمال کرو]

۴ ـ تین ہم خط نقطے ا، د، ج دئے گئے ہیں، ج میں سے گذرنیوالا کوئی دوسرا خط ج ع ہے، ع ایک ثابت نقطہ ہے اور ب، ج ع پر کوئی متحرک نقطہ ہے۔ خطوط ا ع اور ب د، ق پر متقاطع ہوتے ہیں، خطوط ج ق اور د ع، ر پر اور خطوط ب ر اور ا ج، ف پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ جب ب، ج ع پر حرکت کرتا ہے تو ف ایک ثابت نقطہ ہے۔

۵ ـ ایک مثلث ا ب ج کے ضلع ب ج میں کوئی نقطہ م ہے، اس نقطہ سے خطوط م بَ اور م جَ علی الترتیب ا ج اور ا ب کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو ا ب اور ا ج کو بَ اور جَ پر قطع کرتے ہیں۔ خطوط ب جَ اور ج بَ، ف پر متقاطع ہوتے ہیں اور ا ف، بَ جَ کو مَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

مَ بَ : مَ جَ = م ب : م ج

۶ ـ ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا اور ا ب پر علی الترتیب موسیقی مزدوجوں کے زوج (د دَ)، (ع عَ) (ف فَ) نقطوں کے زوجوں (ب ج)، (ج ا)، (ا ب) کے لحاظ سے لئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثوں د ع ف اور دَ عَ فَ کے متناظر اضلاع مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر متقاطع ہوتے ہیں یعنے ع ف اور عَ فَ، ضلع ب ج پر متقاطع ہوتے ہیں اور علی ہذا القیاس۔

۷ ـ مثلث ا ب ج کے راسوں کو کسی نقطہ ط سے ملایا گیا ہے، ملانیوالے خطوں سے جو زاوئے بنتے ہیں انکی داخلی تنصیف خطوط

ط اَ، ط بَ، ط جَ سے ہوئی ہے۔ اَ، ب ج پر واقع ہے، بَ ضلع ج ا پر اور جَ ضلع ا ب پر واقع ہے۔ نیز اَ، بَ، جَ کے موسیقی مزدوج بلحاظ ب اور ج، ج اور ا، ا اور ب کے اً، بً، جً ہیں۔ ثابت کرو کہ اً، بً، جً ہم خط ہیں۔

۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے عمود ا ا۱، ب ب۱، ج ج۱ ہیں۔ ا۱ ب۱ ضلع ا ب سے ج۲ پر ملتا ہے۔ ل اس خط کا نقطہ وسطی ہے جو ا کو مرکز عمودی سے ملاتا ہے، ج۱ ل اور ب ب۱، ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ج۲ ت، ب ج پر عمود ہے۔

(۷۹) ۹۔ ایک دئے ہوئے دائرہ کے باہر ا ایک ثابت نقطہ ہے اور دائرہ کے محیط پر ف ایک متغیر نقطہ ہے۔ خط ا ق جو ا ف کے علی القوائم ہے ف پر کے مماس سے ق پر ملتا ہے۔ اگر مستطیل ق ا ف ر کی تکمیل کیجائے تو ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۰۔ دو غیر قاطع دائروں کو کاٹتا ہوا ایک خط کھینچا گیا ہے۔ اس خط پر دو ایسے نقطے معلوم کرنیکا عمل دریافت کرو کہ ہر نقطہ (اِن دو دائروں کے لحاظ سے) دوسرے نقطہ کے قطبیوں کا نقطہ تقاطع ہو۔

۱۱۔ ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر راسوں ا، ب، ج کے مقابل تین نقطے ا۱، ب۱، ج۱ ہیں۔ نیز ضلعوں پر ا۲، ب۲، ج۲ ایسے نقطے ہیں کہ ا۱ اور ا۲ نقاط ب اور ج کے موسیقی مزدوج ہیں، ب۱ اور ب۲ نقاط ج اور ا کے موسیقی مزدوج ہیں، اور ج۱ اور ج۲ نقاط ا اور ب کے موسیقی مزدوج ہیں۔ اگر ا۲، ب۲، ج۲ ہم خط ہوں تو ثابت کرو کہ ا ا۱، ب ب۱، ج ج۱ ہم نقطہ ہونے چاہئیں۔

۱۲ — ایک مثلث اب ج کے راسوں میں سے ا ا۱، ب ب۱، ج ج۱ ہم نقطہ خطوط ہیں۔ ب۱ ج۱ اور ب ج ا۲ پر ملتے ہیں، ج۱ ا۱ اور ج ا ب۲ پر ملتے ہیں اور ا۱ ب۱ اور اب ج۲ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ دائرے جو ا۱ ا۲، ب۱ ب۲، ج۱ ج۲ پر انہیں قطر مانکر کھینچے گئے ہوں سب کے سب اب ج کے حائط دائرہ کو علی القوائم قطع کرتے ہیں اور ان کے مرکز ایک ہی خط مستقیم میں واقع ہیں۔ (مثال ۳ کے ساتھ مقابلہ کرو)

۱۳ — اگر ا اور ب ایک دائرہ کے فردوج نقطے ہوں اور اب کا وسطی نقطہ م ہو تو ثابت کرو کہ م سے دائرہ کے مماس طول م ا کے ہونگے

۱۴ — اگر دائروں کے ایک نظام کے ہر دائرہ کے لئے نقطوں کا ایک ہی زوج مزدوج ہو تو دائروں میں سے دو دو کے بنیادی محور ہم نقطہ ہونگے۔

۱۵ — اگر دائروں کا ایک نظام مقلوب نقطوں کا ایک مشترک زوج رکھے تو یہ نظام ہم محور ہونا چاہئے۔

۱۶ — ہم محور دائروں کے ایک نظام کے انتہائی نقطے و اور وَ ہیں اور ان کے مستوی میں ا کوئی نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ ا سے ان میں سے کسی ایک دائرہ کے مماس کھینچے جائیں تو وتر تماس اس قطر کے دوسرے سرے میں سے گذریگا جو ا میں سے دائرہ ا و وَ کا کھینچا گیا ہے۔

آٹھواں باب

درپیچ

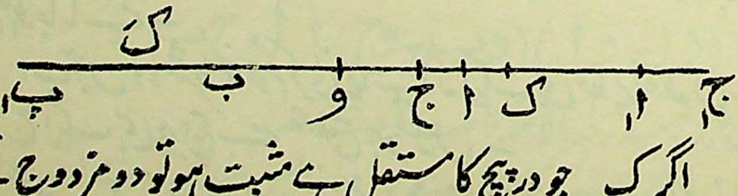
۷۷ ۔ **تعریف ۔**

اگر ایک خط پر و ایک نقطہ ہو اور اسی خط پر نقطوں کے زوج ا، ا_1، ب، ب_1، ج، ج_1، وغیرہ ایسے ہوں کہ

$$\text{و ا} \times \text{و ا}_1 = \text{و ب} \times \text{و ب}_1 = \text{و ج} \times \text{و ج}_1 = \ldots = \text{ک}$$

تو ہم کہتے ہیں کہ نقطوں کے یہ زوج درپیچ میں ہیں۔ دو متعلقہ نقطے جیسے ا اور ا_1 مزدوج کہلاتے ہیں اور بعض اوقات ہر مزدوج دوسرے کا " زوج " کہلاتا ہے۔

نقطہ و کو درپیچ کا مرکز کہتے ہیں۔



اگر ک جو درپیچ کا مستقل ہے مثبت ہو تو دو مزدوج نقطے، و کی ایک ہی جانب واقع ہونگے اور خط پر و کی مخالف جانبوں میں

ک، کَ دو حقیقی نقطے ایسے ہونگے کہ ہر ایک نقطہ دریچ میں اپنا آپ زوج ہوگا یعنے وک۲ = وکَ۲ = ک۲ ۔ یہ نقطے ک اور کَ دریچ کے دُوہرے نقطے کہلاتے ہیں ۔

یہ یاد رہے کہ ک، کَ کا زوج نہیں ہے یہی وجہ ہے کہ ہم نے ک، کَ لکھا ہے اور ک، نہیں لکھا ۔

یہ ظاہر ہے کہ (ا اَ، ک کَ) = -۱ اور یہ نقطوں کے تمام زوجوں کے لئے درست ہے ۔

اگر ک منفی ہو تو دو فرد زوج نقطے و کی مخالف جانبوں میں واقع ہونگے اور اس صورت میں دُوہرے نقطے خیالی ہونگے ۔

اگر ا اَ، ب بَ، ج جَ وغیرہ پر انہیں قطر مانکر دائرے کھینچے جائیں تو یہ دائرے ایک ہم محور نظام بنائینگے جس کا محور اُس خط کو جس پر نقطے واقع ہیں و پر قطع کریگا ۔

ک اور کَ اس ہم محور نظام کے انتہائی نقطے ہونگے ۔ (81)

یہ یاد رہے کہ نقطوں کے ہر زوج میں ہر نقطہ بلحاظ اُس دائرہ کے جو ک کَ کو قطر مانکر کھینچا گیا ہو دوسرے نقطہ کا مقلوب ہوگا ۔

یہ ظاہر ہے کہ اگر نقطوں کے دو زوج معلوم ہوں یا نقطوں کا ایک زوج اور ایک دوہرا نقطہ یا دو دوہرے نقطے معلوم ہوں تو دریچ پوری طرح متعین ہو جاتا ہے ۔

اب ہمیں وہ شرط معلوم کرنی چاہئے کہ ایک ہی خط پر نقطوں کے تین زوج ایک ہی دریچ سے متعلق ہو سکیں ۔

۷۸ ۔ مسئلہ ۔ ضروری اور کافی شرط کہ نقطوں کا ایک زوج

ج، ج_1 اُس درپیچ سے متعلق ہو جو نقطوں کے دو زوجوں ا، ا_1، ب، ب_1 سے متعین ہوتا ہے یہ ہے کہ

$$(\text{ا ب ج ا}_1) = (\text{ا}_1\,\text{ب}_1\,\text{ج}_1\,\text{ا})$$

اول ہم یہ ثابت کرینگے کہ یہ شرط ضروری ہے۔

فرض کرو کہ ج اور ج_1 درپیچ سے متعلق ہیں۔ فرض کرو کہ اس درپیچ کا مرکز و ہے اور اسکا مستقل ک۔

$$\therefore\ \text{و ا} \times \text{و ا}_1 = \text{و ب} \times \text{و ب}_1 = \text{و ج} \times \text{و ج}_1 = \text{ک}$$

$$\therefore\ (\text{ا ب ج ا}_1) = \frac{\text{ا ب} \times \text{ج ا}_1}{\text{ا ا}_1 \times \text{ج ب}} = \frac{(\text{و ب} - \text{و ا})(\text{و ا}_1 - \text{و ج})}{(\text{و ا}_1 - \text{و ا})(\text{و ب} - \text{و ج})}$$

$$= \frac{\left(\frac{\text{ک}}{\text{و ب}_1} - \frac{\text{ک}}{\text{و ا}_1}\right)\left(\frac{\text{ک}}{\text{و ا}} - \frac{\text{ک}}{\text{و ج}_1}\right)}{\left(\frac{\text{ک}}{\text{و ا}} - \frac{\text{ک}}{\text{و ا}_1}\right)\left(\frac{\text{ک}}{\text{و ب}_1} - \frac{\text{ک}}{\text{و ج}_1}\right)}$$

$$= \frac{(\text{و ب}_1 - \text{و ا}_1)(\text{و ا} - \text{و ج}_1)}{(\text{و ا} - \text{و ا}_1)(\text{و ب}_1 - \text{و ج}_1)} = \frac{\text{ا}_1\text{ب}_1 \times \text{ج}_1\text{ا}}{\text{ا}_1\text{ا} \times \text{ج}_1\text{ب}_1} = (\text{ا}_1\,\text{ب}_1\,\text{ج}_1\,\text{ا})$$

اس طرح مندرجۂ بالا شرط ضروری ہے۔

[اس مسئلہ کا اس سے زیادہ خالص ہندسی ثبوت آئندہ دفعہ میں دیا جائیگا]

ثانیاً اوپر کی شرط کافی ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ

(ا ب ج ا$_1$) = (ا$_1$ ب$_1$ ج$_1$ ا)

اور فرض کرو کہ اُس درپیچ میں جو ا، ا$_1$، ب، ب$_1$ سے متعین ہوتا ہے ج کا زوج جَ ہے۔

∴ (ا ب ج ا$_1$) = (ا$_1$ ب$_1$ جَ ا) (82)

∴ (ا ب ج$_1$ ا) = (ا$_1$ ب$_1$ جَ ا)

∴ ج$_1$ اور جَ منطبق ہوتے ہیں۔

پس مسئلہ پوری طرح ثابت ہو چکا۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر ا، ا$_1$، ب، ب$_1$، ج، ج$_1$، د، د$_1$ ایک ہی درپیچ سے متعلق ہوں تو

(ا ب ج د) = (ا$_1$ ب$_1$ ج$_1$ د$_1$)

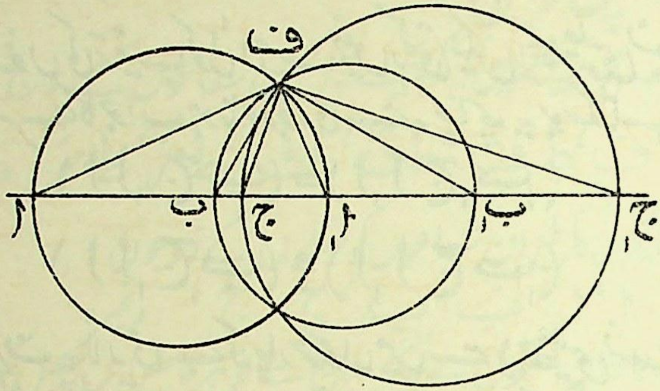
نتیجہ صریح ۲۔ اگر درپیچ کے دُہرے نقطے ک، کَ ہوں تو

(ا ا$_1$ ک کَ) = (ا$_1$ ا ک کَ)

اور (ا ب ک ا$_1$) = (ا$_1$ ب$_1$ ک ا)

۷۹۔ دفعہ ماسبق کے مسئلہ کا پہلا حصہ حسب ذیل طریقہ پر ثابت کیا جا سکتا ہے اگر نقطوں کے تین زوج ایک ہی درپیچ سے متعلق ہوں تو ا، ا$_1$، ب، ب$_1$، ج، ج$_1$ پر انہیں قطر مانکر کھینچے ہوئے دائرے ہم محور ہونگے (دفعہ [illegible])۔

فرض کرو کہ اِن دائروں کا ایک نقطہ تقاطع ف ہے۔



اب زاوئے ا ف ا۱، ب ف ب۱، ج ف ج۱ قائمۃ الزاوئے ہیں اور اس لئے

ف (اب ج ا۱) = ف (ا۱ ب۱ ج۱ ا)

∴ (اب ج ا۱) = (ا۱ ب۱ ج۱ ا)

یہ ہو سکتا ہے کہ دائرے حقیقی نقطوں پر قطع نہ ہوں لیکن تاہم مسئلہ تسلسل کے اصول کی باعث جو علم التحلیل سے ماخوذ ہوتا ہے درست رہتا ہے۔

۸۰ — یہ مسئلہ جو ہم نے ابھی ثابت کیا ہے اہم ترین ہے۔

(23) وہ جانچ کہ نقطوں کے تین زوج ایک ہی درپیچ سے متعلق ہوں یہ ہے کہ ہر زوج میں سے ایک ایک نقطہ اور تینوں نقطوں میں سے کسی ایک کا زوج لینے سے جو چلیپی نسبت بنے اُس متناظر چلیپی نسبت کے مساوی ہونی چاہئے

جو ان چار نقطوں کے زوجوں سے بنتی ہے۔

حرفوں کی ترتیب کوئی اہمیت نہیں رکھتی لیکن اِنکا چلیپی نسبتوں میں ایک دوسرے کا جواب ہونا ضروری ہے۔ چنانچہ یہ ہوسکتا ہے کہ

(ا ا$_۱$ ج ب) = (ا ا$_۱$ ج ب$_۱$)

یا (ا ا$_۱$ ج$_۱$ ب) = (ا ا$_۱$ ج ب$_۱$)

صرف یہ لازمی ہے کہ چار حرفوں میں سے (جو چلیپی نسبت میں استعمال کئے جائیں) تین حروف ہر زوج میں سے ایک حرف لینے سی بنائے جائیں۔

۸۱۔ مسئلہ۔ نقطوں کی کوئی سعت جو درپیچ میں ہو ایک سعت میں مُظلِل ہوگی جو درپیچ میں ہوگی۔

فرض کرو کہ ا، ا$_۱$، ب، ب$_۱$، ج، ج$_۱$ درپیچ ہے اور فرض کرو کہ اِنکے ظِل متناظر چھوٹے حرفوں سے تعبیر کئے گئے ہیں۔

اب (ا ب ج ا$_۱$) = (ا ب$_۱$ ج$_۱$ ا)

لیکن (ا ب ج$_۱$ ا) = (ا ب ج ا$_۱$)

اور (ا ب$_۱$ ج$_۱$ ا) = (ا$_۱$ ب$_۱$ ج$_۱$ ا)

∴ ا، ا$_۱$، ب، ب$_۱$، ج، ج$_۱$ ایک درپیچ بناتے ہیں۔

نوٹ۔ کسی درپیچ کا مرکز اُس درپیچ کے مرکز میں مُظلل نہیں ہوتا جو ظل سے حاصل ہوا ہے لیکن دُوہرے نقطے دوہرے نقطوں میں مُظلل ہوتے ہیں۔

۸۲ — درپیچ پنسل ۔

اب ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک پنسل میں شعاعوں کے زوج
ط ف، ط فَ، ط ق، ط قَ، ط ر، ط رَ وغیرہ
ایسے ہوں کہ کوئی قاطع اِن شعاعوں کو نقطوں کے زوجوں
ا، اَ، ب، بَ، ج، جَ وغیرہ
میں قطع کرے اور اِن نقطوں سے ایک درپیچ بنے تو ہر قاطع اس پنسل کو اسی طرح قطع کریگا ۔

ایسی کسی پنسل کو "درپیچ میں پنسل" یا صرف درپیچ پنسل کہتے ہیں ۔

درپیچ پنسل کے دُوہرے خطوط ط، طَ میں سے گذرنیوالے وہ خطوط (84)
ہیں جن پر درپیچ کے دوہرے نقطے جو مختلف قاطعوں سے حاصل ہوں واقع ہوتے ہیں ۔

یہ ذہن نشیں رہے کہ دُوہرے خطوط مزدوج شعاعوں کے کسی زوج کے ساتھ موسیقی مزدوج ہوتے ہیں ۔

اِس واقعہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی درپیچ پنسل کے دُوہرے خطوط ط د اور ط دَ ہوں اور درپیچ پنسل کی شعاعیں ط ا، ط اَ، تو ط د اور ط دَ اُس درپیچ پنسل کے لیے جس کے دُوہرے خطوط ط ا اور ط اَ ہیں مزدوج خطوط کا ایک زوج ہوں گے ۔

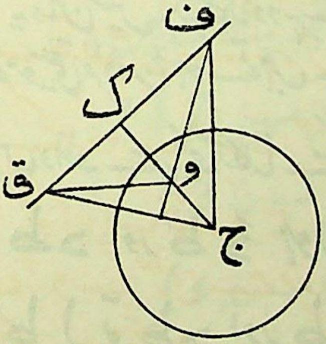
۸۳ — ذواربعۃ الاضلاع اور چار زاوئی کے درپیچ خواص کسی آئندہ

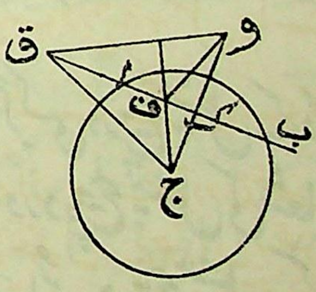
باب تک جبکہ ہم مکافات سے بحث کرینگے ملتوی کئے جاتے ہیں اور اب ہم دائرہ کے درپیچ خواص کو لیتے ہیں جو بڑی اہمیت رکھتے ہیں۔ مخروطی تراشوں کی بحث میں ہم انہیں کثرت سے استعمال کرینگے۔

۸۴۔ دائرہ کے درپیچ خواص۔

مسئلہ۔ نقطوں کے زوج جو ایک دائرہ کے لئے مزدوج ہوں اور ایک خط پر واقع ہوں درپیچ میں ایک سعت بناتے ہیں جس کے دوہرے نقطے خط اور دائرہ کے نقاط تقاطع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ خط ل پر ف اور ق مزدوج نقطوں کا ایک زوج ہیں۔ فرض کرو کہ ل کا قطب و ہے۔





اس طرح و ف ق ایک خود مزدوج مثلث ہے اور اسکا مرکز عمودی ج پر ہے جو دائرہ کا مرکز ہے (دفعہ ۱۱۶)۔

فرض کرو کہ ج سے ل پر عمود ج ک ہے۔

اب ف ک × ک ق = ک و × ک ج

∴ ک ف × ک ق = و ک × ک ج

(85) پس ف اور ق ایک درپیچ سے متعلق ہیں جسکا مرکز ک ہے اور جسکا مستقل و ک × ک ج ہے۔ اسلئے اسکے دوہرے نقطے حقیقی یا خیالی ہونگے بموجب اسکے کہ ف ق دائرہ کو قطع کرے یا نہ کرے۔

اگر ف ق دائرہ کو ا اور ب پر قطع کرتا ہے تو و ک × ک ج = ک ا^2 = ک ب^2 اسلئے ا اور ب درپیچ کے دوہرے نقطے ہیں۔

یہ بھی ظاہر ہے کہ ا اور ب دوہرے نقطے ہونے چاہئیں کیونکہ ہر ایک اپنا آپ مزدوج ہے۔

حسب ذیل مسئلہ جو اوپر کے مسئلہ کا تکافی ہے اِس سے آسانی کے ساتھ ماخوذ ہوتا ہے۔

مسئلہ۔ ایک دائرہ کے لئے مزدوج خطوں کے زوج جو ایک نقطہ میں سے گزریں ایک درپیچ پنسل بناتے ہیں جس کے دوہرے خطوط اس نقطہ سے کھینچے ہوئے مماس ہونگے۔

کیونکہ ایک نقطہ و میں سے گذرنیوالے مزدوج خطوں کے جوڑے، و کے قطبی سے مزدوج نقطوں کے جوڑوں پر ملیں گے، یہ نقطے ایک درپیچ سعت بناتے ہیں جس کے دوہرے نقطے وہ نقطے ہیں جن پر و کا قطبی دائرہ کو قطع کرتا ہے۔

اس لئے و میں سے گذرنیوالے مزدوج خطوں کے جوڑے ایک درپیچ پنسل بناتے ہیں جس کے دوہرے خطوط وہ خطوط ہیں جو و کو اُن نقطوں سے ملاتے جن پر و کا قطبی دائرہ کو قطع کرتا ہے یعنی و سے دائرہ کے مماس۔

اگر و دائرہ کے اندر ہو تو دُوہرے خطوط حقیقی نہیں ہونگے۔

۸۵ – قائم پنسل در پیچ میں۔

در پیچ پنسل کی ایک خاص صورت وہ ہے جسمیں خطوں کے زوجوں میں سے ہر زوج، قائمہ زاویہ بنائے۔

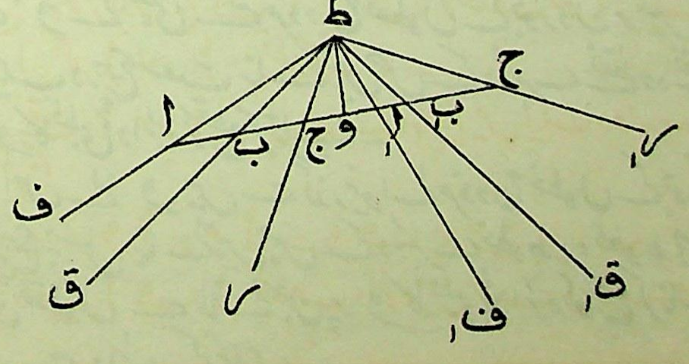
دفعہ ۸۴ کے دوسرے مسئلہ کی رُو سے یہ ظاہر ہے کہ ایسی کوئی پنسل در پیچ میں ہوگی کیونکہ ایک نقطہ پر خطوں کے وہ زوج جو علی القوائم ہوں کسی دائرہ کے فردوج قطر ہوتے ہیں جبکہ اس دائرہ کا مرکز اس نقطہ پر ہو۔

لیکن ہم اِسے اس طرح بھی ثابت کرسکتے ہیں۔ فرض کرو کہ علی القوائم خطوں کے زوج ط ف، ط ف$_1$، ط ق، ط ق$_1$، وغیرہ ہیں اور کوئی قاطع ت انہیں نقطوں ا، ا$_1$؛ ب، ب$_1$، وغیرہ پر قطع کرتا ہے۔ ت پر عمود ط و کھینچو۔ اب

$$\text{و ا} \times \text{و ا}_1 = -\text{و ط}^2 = \text{و ب} \times \text{و ب}_1$$

اسلئے نقطوں کے یہ زوج ایک در پیچ سے متعلق ہیں جسکے دُوہرے نقطے خیالی ہیں۔ (86)

پس ایک نقطہ پر علی القوائم خطوں کے زوج در پیچ پنسل بناتے ہیں جسکے دُوہرے خطوط خیالی ہیں۔



ایسے کسی درپیچ کو قائم درپیچ کہتے ہیں ۔

یہ یاد رہے کہ اسی خاصیت کی مدد سے اس امر کی جانچ ہو سکتی ہے کہ آیا ایک نقطہ میں سے گذرنیوالے خطوں کے تین زوج درپیچ بناتے ہیں یا نہیں ۔ اگر ان کو اس طور پر مُظلل کیا جا سکے کہ وہ زاوئے جو ہر زوج سے بنیں اس ظلل میں قائمہ زاوئے ہو جائیں تو یہ خطوط درپیچ میں ہونے چاہئیں

۸۶ ۔ مسئلہ ۔ ہر درپیچ پنسل میں شعاعوں کا ایک زوج باہم علی القوائم ہوتا ہے اور ایک سے زیادہ ایسے زوج نہیں ہو سکتے الا آنکہ درپیچ پنسل قائم درپیچ پنسل ہو ۔

فرض کرو کہ درپیچ پنسل کا راس ف ہے ۔

کوئی قاطع ل لو اور فرض کرو کہ و، اس درپیچ سعت کا مرکز ہے جو پنسل اس قاطع پر بناتی ہے اور فرض کرو کہ اس درپیچ کا مستقل ک ہے

و ف کو ملاؤ اور و ف میں ایک نقطہ فَ ایسا لو کہ و ف × و فَ = ک ۔ اس لئے ف اور فَ، و کی ایک ہی جانب یا مخالف جانبوں میں ہونگے بموجب اس کے کہ ک مثبت ہو یا منفی ۔

ف فَ کی تنصیف م پر کرو اور م ج، ف فَ کے علی القوائم کھینچو اور فرض کرو کہ م ج، خط ل کو ج پر ملتا ہے ۔

ج کو مرکز اور ج ف یا ج فَ کو نصف قطر مانکر ایک دائرہ بناؤ جو ل کو ا اور ا۱ پر قطع کرے ۔

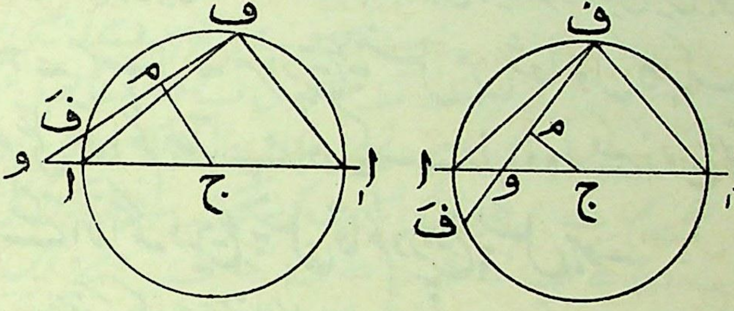
نقطے ا اور ا۱، ل پر کے درپیچ میں ایک دوسرے کا زوج ہونگے کیونکہ

و ا × و ا۱ = و ف × و فَ = ک

نیز زاویہ ا ف ا۱ نصف دائرہ میں ہونے کی وجہ سے زاویہ قائمہ ہوگا (87)

پس در پیچ پنسل میں شعاعوں کا زوج ف أ اور ف اَ ہے ایسا کہ ف أ اور ف اَ باہم علی القوائم ہیں۔

اُس خاص صورت میں جسمیں و، ف فَ کا نقطہ وسطی ہو ج اور و منطبق ہوتے ہیں۔



اُس صورت میں جسمیں ف و، ل پر عمود ہو فَ فَ کے وسطی نقطہ م میں سے گذرنے والا خط جو ف فَ پر عمود ہے ل کے متوازی ہوگا اور نقطہ ج لا تناہی پر ہوگا۔ اس صورت میں ف و اور وہ خط جو ف میں سے گذرتا ہے اور ل کے متوازی ہے قائم شعاعوں کا زوج ہونگے کیونکہ نقطہ و اور ل پر لا تناہی پر کا نقطہ در پیچ سعت میں ایک دوسرے کے زوج ہیں۔

اس طرح ہر در پیچ پنسل میں قائم شعاعوں کا ایک زوج ہوتا ہے اگر پنسل میں ایک سے زیادہ قائم شعاعوں کے زوج ہوں تو سب زوج علی القوائم ہونے چاہئیں کیونکہ شعاعوں کے دو زوج در پیچ پنسل کی پوری طرح تعین کرتے ہیں۔

۸۷ - مسئلہ - کوئی در پیچ پنسل ایک در پیچ پنسل میں مُظِلل

ہوتی ہے اور کوئی درپیچ ایک قائم درپیچ میں مُظلل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ مُستوی س میں نقطہ و پر کی ایک درپیچ پنسل کی شعاعوں کے زوج مُستویوں س اور س کے خط تقاطع سے نقطوں کے زوجوں ا' ا، ب' ب، ج' ج وغیرہ پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ و کا ظِل وَ ہے۔

اب ا' ا، ب' ب، ج' ج وغیرہ ایک درپیچ سعت ہے۔

∴ وَ(ا' ا، ب' ب، ج' ج وغیرہ) ایک درپیچ ہے۔

نیز چونکہ مُستوی س میں کے دو زاویوں کو ہم قائمہ زاویوں میں مُظلل کر سکتے ہیں اسلئے ہم ایک درپیچ کی شعاعوں کے دو زوجوں کے درمیانی زاویوں کا انتخاب انہیں قائمہ زاویوں میں مظلل کرنے کے لئے کر سکتے ہیں۔ تب پنسل قائم پنسل میں مظلل ہونی چاہیئے۔ (88)

یہ بھی ذہن نشیں رہے کہ جب ہم درپیچ پنسل کو قائم پنسل میں مُظلل کرتے ہیں تو اسکے ساتھ ہی کسی خط کو لاانتہا ہی پر مظلل کر سکتے ہیں (دفعہ ۴۳)

نوٹ۔ چونکہ کسی قائم درپیچ میں کوئی حقیقی دوہرے خطوط نہیں ہوتے اسلئے یہ ظاہر ہے کہ اگر ایک درپیچ پنسل کو قائم پنسل میں مُظلل کرنا ہو تو پنسل میں حقیقی دوہرے خطوط نہیں ہونے چاہئیں ورنہ ظِل حقیقی نہیں ہوگا۔ کوئی درپیچ پنسل جس میں حقیقی دوہرے خطوط ہوں قائم پنسل میں صرف اُس وقت مظلل ہو سکتی ہے جبکہ ظِل کا راس خیالی ہو۔

ہم نے جو کچھ یہاں بیان کیا ہے اُسکو سمجھنے کے لئے طالب علم اسکا مقابلہ دفعہ ۴۳ کے ساتھ کر سکتا ہے جس میں دو دائرے جو ط کی تعیین کرتے ہیں حقیقی نقطوں میں متقاطع نہیں ہوتے اگر سطح س میں کی درپیچ پنسل سے خط منعدم پر جو درپیچ سعت حاصل ہوتی ہے اسکے دوہرے نقطے حقیقی ہوں اور ظاہر ہے کہ یہ دوہرے نقطے حقیقی ہوں گے

اگر درپیچ پینسل میں حقیقی دُوہرے خطوط ہوں۔

مثالیں

۱۔ کوئی قاطع خط ہم محور دائروں کے ایک نظام سے نقطوں کے ایسے دو جوڑوں میں منقطع ہوتا ہے جو درپیچ میں ہوتے ہیں اور درپیچ کے دُوہرے نقطے دائروں کے نظام کے انتہائی نقطوں کے ساتھ ہم دائری ہوتے ہیں۔

۲۔ اگر ایک درپیچ کے دُوہرے نقطے ک، کَ ہوں اور نقطے ا، اَ، ب، ب۱ بھی درپیچ سے متعلق ہوں تو ا، ب۱، ا۱، ب، ک، کَ درپیچ میں ہونگے۔

۳۔ اگر ایک درپیچ پینسل کے دُوہرے خطوط علی القوائم ہوں تو وہ اُن زاویوں کے ناصف ہونے چاہئیں جو مزدوج شعاعوں کے ہر زوج کے درمیان ہیں۔

۴۔ دو مثلث ا ب ج اور اَ بَ جَ مستوی منطرہ میں ہیں۔ اِن کے متناظر اضلاع ب ج، بَ جَ وغیرہ علی الترتیب ف، ق، ر میں متقاطع ہوتے ہیں اور خطوط ا اَ، ب بَ، ج جَ خط ف ق ر کو علی الترتیب فَ، قَ، رَ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ سعت (ف فَ، ق قَ، ر رَ) ایک درپیچ بناتی ہے۔

۵۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے تین وتروں سے بننے والے مثلث کے حائط دائرہ کا مرکز اِن تین وتروں پر بنائے ہوئے دائروں کے نظام کے بنیادی محور پر واقع ہوتا ہے۔ (89)

۶۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے متقابلہ راسوں کے دو جوڑوں میں سے ہر ایک، ایک دائرہ کے لحاظ سے مزدوج ہو تو راسوں کا تیسرا جوڑا بھی اِس دائرہ کے لحاظ سے مزدوج ہوگا اور یہ دائرہ ایک ہم محور نظام کا ایک رکن ہوگا جسکا بنیادی محور وہ خط ہوگا جو ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں کے نقاط وسطی کو جو ہم خط ہوتے ہیں ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔

۷ — ایک نقطہ سے دو دائروں کے مماسوں کے جوڑے اور وہ دو خطوط جو اِس نقطہ کو دائروں کے مشابہت کے مرکزوں سے ملاتے ہیں ایک درپیچ بناتے ہیں۔

۸ — ثابت کرو کہ ایک دئے ہوئے مثلث کے مستوی میں دو نقطے ایسے ہیں کہ مثلث کے راسوں سے ہر ایک کے فاصلے ایک دی ہوئی نسبت میں ہیں — نیز ثابت کرو کہ اِن نقطوں کو ملانے والا خط مثلث کے حائط مرکز میں سے گذرتا ہے —

نواں باب

مخروطی تراشیں

۸۸ - تعریفات - مخروطی تراشیں (یا مخروطیاں جیسا کہ انہیں اکثر کہا جاتا ہے) وہ منحنی ہیں جو کسی مُستوی پر ایک دائرہ کا مخروطی یا انتصابی ظِل لینے سے حاصل ہوتے ہیں، یہ مُستوی دائرہ کے مُستوی سے علٰحدہ ہوتا ہے۔ بس وہ (مخروطی تراشیں) ایک مستدیر قاعدے والے مخروط کی مُستوی تراشیں ہیں۔ یہ ضروری نہیں ہے کہ مخروط ایک قائم مستدیر مخروط یعنے ایسا مخروط ہو جس کا راس اُس خط پر واقع ہو جو مستدیر قاعدے کے مرکز میں سے گذرے اور اِس پر عمود ہو۔ صرف اِس بات کی ضرورت ہے کہ مخروط کا قاعدہ مستدیر ہو (اور اِس لئے اس کی وہ تمام تراشیں جو قاعدہ کے متوازی ہوں دائرے ہوں گی) اور ایسی صورت میں اس کی تراشیں **مخروطی تراشیں** کہلاتی ہیں۔

۸۹ - مخروطی تراشوں کی تقسیم اُس رشتہ کی بموجب کیجاتی ہے جو خطِ منعدم کو اُس دائرہ کے ساتھ ہوتا ہے جس کی تظلیل کی جاتی ہے۔

اگر خط منعدم اس دائرہ کو مس کرتا ہے تو ظِل کے منحنی کو **قطع مکافی** کہتے ہیں؛

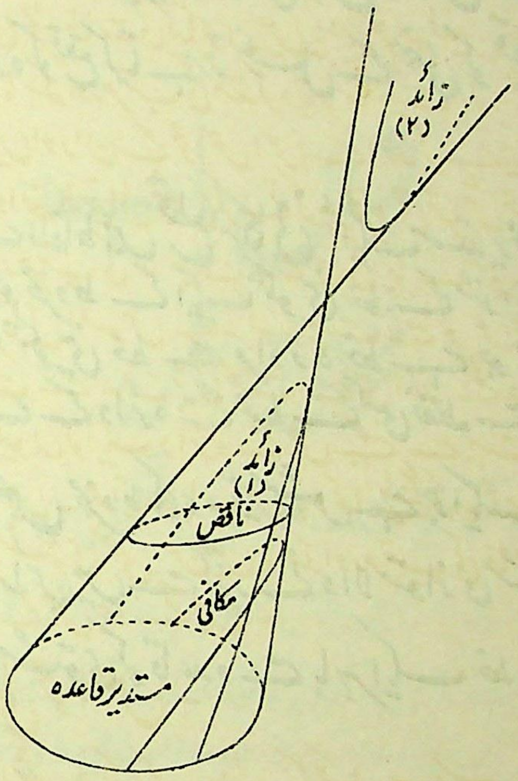
اگر خط منعدم دائرہ سے نہیں ملتا تو منحنی کو قطع ناقص کہتے ہیں، اور اگر خط منعدم دائرہ کو قطع کرتا ہے تو ظِل کے منحنی کو قطع زائد کہتے ہیں۔

دوسرے الفاظ میں قطع مکافی، ایک مستدیر مخروط کی وہ تراش ہے جو مخروط کے ایک تکوینی خط کے متوازی مستوی سے کٹتی ہے، تکوینی خط سے مراد وہ خط ہے جو مخروط کے راس کو قاعدے کے دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ سے ملاتا ہے۔

قطع ناقص مخروط کی وہ تراش ہے جو ایک ایسے مستوی سے کٹتی ہے کہ راس میں سے گذرنے والا متوازی مستوی مخروط کے قاعدہ کے مستوی کو قاعدہ سے باہر ایک خط پر قطع کرتا ہے۔

قطع زائد مخروط کی وہ تراش ہے جو ایک ایسے مستوی سے کٹتی ہے کہ راس میں سے گذرنے والا متوازی مستوی مخروط کے قاعدے کو قطع کرتا ہے۔

شکل ذیل میں ان منحنیوں کی مثال دی گئی ہے اور یہ (91)
دیکھا جا سکتا ہے کہ قطع زائد دو شاخوں پر مشتمل ہوتا ہے اور اِن
دو شاخوں کو حاصل کرنے کے لئے مخروط کو اِس کے راس کے
دونوں جانب بڑھانا پڑتا ہے۔



۹۰ - ماسکہ اور مرتب -

ہر مخروطی تراش یا دائرہ کے ظل میں حسب ذیل خاصیت جسے ہم ابھی ثابت کرینگے پائی جاتی ہے : ہر مخروطی تراش، ایک مستوی میں ایک ایسے نقطہ کا طریق ہوتی ہے کہ اسی مستوی میں کے ایک ثابت نقطہ سے اسکا فاصلہ، اسی مستوی میں کے ایک ثابت خط سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے۔ اس ثابت نقطہ کو مخروطی کا ماسکہ کہتے ہیں، ثابت خط کو مرتب کہتے ہیں اور مستقل نسبت خروج المرکز کہلاتی ہے۔ آیندہ ہم ثابت کرینگے کہ اگر خروج المرکز اکائی ہو تو مخروطی قطع مکافی ہوگا، اکائی سے کم ہو تو قطع ناقص اور اکائی سے

بڑا ہو تو قطع زائد۔

(92 **۹۱ —** ہندسی مخروطات کی کتابوں میں بالعموم مولفین منحنیوں کی اس خاصیت (یعنی ماسکہ اور مرتب کی متذکرہ بالا خاصیت) کو اِنکی تعریف کے طور پر لیتے ہیں اور ان کے خواص اس سے اخذ کرتے ہیں اور ایسا کرنے میں اس واقعہ کا خیال نہیں کرتے کہ ہر مخروطی تراش خواہ اس کی تعریف ماسکہ اور مرتب کی خاصیت سے ہی کی جائے کسی نہ کسی دائرہ کا ظِل ہے۔ یہ امر قابل افسوس ہے۔ کیونکہ بہت سے خواص جو ماسکہ اور مرتب کی خاصیت سے صرف بڑی محنت سے ہی اخذ کئے جا سکتے ہیں وہی خواص مخروطیوں کو ایک دائرہ کے ظِل سمجھنے سے بہت آسانی سے ثابت ہو جاتے ہیں۔ ہم آیندہ باب میں یہ دکھائینگے کہ یہ ثابت کرنا کسقدر آسان ہے کہ وہ مستوی منحنی جن میں ماسکہ اور مرتب کی خاصیت موجود ہو ایک دائرہ کے ظِل ہوتے ہیں۔

۹۲ — ظِلّی خواص۔

مخروطی تراشیں چونکہ ایک دائرہ کے ظِل ہیں اس لئے اِن میں دائرہ کے تمام ظِلّی خواص ہونے چاہئیں چنانچہ

(۱) وہ ایسی ہونگی کہ اِن کے مُستوی میں کا کوئی خط انہیں دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کریگا اور اُن نقطوں سے جو دائرہ کے مُستوی میں کے اُن نقطوں کا ظِل ہوں جو دائرہ سے باہر واقع ہیں دو اور صرف دو مماس کھینچے جا سکیں گے جو دائرہ کے مماسوں کے ظِل ہونگے۔

(۲) مخروطی تراشیں صریحاً دائرہ کی ”قطب اور قطبی کی خاصیت“ رکھینگی۔ یعنے اگر ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے گذرنے والے وتروں کے سِروں پر مماسوں کے زوج کھینچے جائیں تو اِن زوجوں کے نقاط تقاطع ایک خط پر واقع ہونگے، اس نقطہ اور اس خط کو ایک دوسرے کے لحاظ سے قطب اور قطبی کہا جاتا ہے۔ جس نقطہ سے منحنی کے مماس کھینچے جائیں اس کا

قطبی وہی خط ہوگا جو اِن مماسوں کے نقاط تماس میں سے گذرتا ہوا کھینچا گیا ہو۔ اِس خط کو اکثر "وترِ تماس" کہا جاتا ہے لیکن صحیح معنوں میں یہ وترِ خط کا صرف وہ حصہ ہوتا ہے جو منحنی سے منقطع ہوتا ہے۔ قطبی طول میں غیر محدود ہوتا ہے۔

(۳) اگر بلحاظ ایک مخروطی کے ایک نقطہ ا کا قطبی ب میں سے گذرے تو ب کا قطبی ا میں سے گذرنا چاہئے۔ ایسے دو نقطوں کو مزدوج نقطے کہتے ہیں۔

(۴) نیز اگر ایک خط ل کا قطب دوسرے خط لَ پر واقع ہو تو لَ کا قطب ل پر واقع ہوگا۔ ایسے دو خطوں کو مزدوج خطوط کہا جاتا ہے۔

(93) (۵) قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت جو دائرہ کے لئے حاصل ہوتی ہے مخروطی تراشوں کے لئے بھی درست رہتی ہے کیونکہ تظلیل سے چلیپی نسبتیں نہیں بدلتیں۔

(۶) چونکہ ایک درپیچ سعت بھی ایک درپیچ سعت میں مُظلل ہوتی ہے اس لئے ایک مخروطی کے لحاظ سے مزدوج نقطوں کے زوج جو ایک خط پر واقع ہوں ایک درپیچ سعت بنائینگے جس کے دُوہرے نقطے وہ نقطے (اگر موجود ہوں) ہونگے جن پر خط منحنی کو قطع کرتا ہے۔

(۷) اسی طرح ایک نقطہ میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے زوج ایک درپیچ پنسل بنائیں گے جس کے دُوہرے خطوط (اگر وہ موجود ہوں) اُس نقطہ سے کھینچے ہوئے مماس ہونگے۔

۹۳۔ دائرہ جسکی تظلیل ایک دوسرے دائرہ میں کیگئی ہو

ایک دائرہ کے ظل کا منحنی بعض شرطوں کے تحت ایک دوسرا دائرہ ہوگا۔

مسئلہ۔ اگر ایک دائرہ کے ظِل کے منحنی میں نقطہ ن میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے زوج ایک قائم درپیچ بنائیں جہاں ن، خطِ معدوم کے قطب کا ظِل ہے تو ظِل کا منحنی ایک دائرہ ہوگا جسکا مرکز ن پر ہوگا۔

چونکہ ن کا قطبی لاتناہی پر کا خط ہے اسلئے ن میں سے گذرنیوالے کسی وتر کے سروں پر کے مماس لاتناہی پر ملینگے۔ لیکن چونکہ وہ درپیچ پنسل جو ن میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں سے بنتی ہے ایک قائم درپیچ پنسل ہے اس لئے یہ مماس ن میں سے گذرنے والے ایک ایسے خط پر ملنے چاہئیں جو وتر پر عمود ہے۔ پس وتر کے سروں پر کے مماس اس کے علی القوائم ہوں گے۔

اِس طرح یہ منحنی یہ خاصیت رکھتا ہے کہ اس کے ہر نقطہ پر کا مماس اُس نصف قطر پر عمود ہوتا ہے جو اِس نقطہ کو ن سے ملاتا ہے۔ یعنی یہ منحنی ایک دائرہ ہے جسکا مرکز ن ہے۔

نتیجۂ صریح۔ ایک دائرہ کی تظلیل ایک دوسرے دائرہ میں اِس طور پر کیجا سکتی ہے کہ اِسکے اندر کا کوئی نقطہ مرکز میں مُظلل ہو۔

کیونکہ ہمیں صرف یہ کرنا ہوگا کہ اِس نقطہ کے قطبی کو لاتناہی پر مُظلل کریں اور اس میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں سے جو درپیچ پنسل حاصل ہو اُسکو ایک قائم درپیچ میں مظلل کریں۔

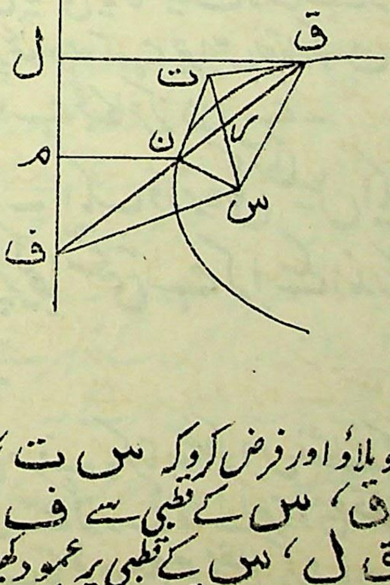
نوٹ۔ وہ نقطہ جسے مرکز میں مُظلل کرتا ہو دائرہ کے اندر ہونا چاہئے

ورنہ ظل حقیقی نہیں ہوگا (دیکھو نوٹ دفعہ ۸۷)

۹۴ - ماسکہ اور مرتب کا قطب اور قطبی ہونا۔ (94)

مسئلہ - اگر ایک دائرہ کے ظل کے منحنی کے مستوی میں ایک نقطہ س ایسا موجود ہو کہ وہ درپیچ پنسل جو س میں سے گذرنیوالے مزدوج خطوں سے بنے ایک قائم درپیچ پنسل ہو تو س اور اسکا قطبی ظل کے منحنی کا ماسکہ اور مرتب ہونگے۔

فرض کرو کہ منحنی پر ن اور ق کوئی دو نقطے ہیں اور فرض کرو کہ ان پر کے مماس ت پر ملتے ہیں۔



س ت کو ملاؤ اور فرض کرو کہ س ت، ن ق کو ر پر قطع کرتا ہے اور ن ق، س کے قطبی سے ف پر ملتا ہے۔ س ف کو ملاؤ اور ن م، ق ل، س کے قطبی پر عمود کھینچو۔ اب س ت، ف کا قطبی ہے کیونکہ ف کا قطبی س میں سے

گذرتا ہے اس وجہ سے کہ س کا قطبی ف میں سے گذرتا ہے اور وہ نیز ت میں سے بھی گذرتا ہے کیونکہ ت کا قطبی ف میں سے گذرتا ہے۔

∴ س ف اور س ت مزدوج خطوط ہیں۔

لیکن بموجب فرض س پر کے مزدوج خطوط ایک قائم درجہ بناتے ہیں

∴ ت س ف قائمہ زاویہ ہے۔

اور قطب اور قطبی کی ہوسیقی خاصیت کی رو سے

(ف ر، ن ق) = -۱

∴ س ت اور س ف زاویہ ن س ق کے ناصف ہیں (دفعہ ۷۲)۔

∴ س ن : س ق = ف ن : ف ق

= ن م : ق ل (متشابہ مثلثوں سے)

∴ س ن : ن م = س ق : ق ل

(95) اس لئے نقطہ س سے منحنی پر کے نقطوں کا جو فاصلہ ہے اُس میں اور اُس فاصلہ میں جو اِن نقطوں کا س کے قطبی سے ہے مستقل نسبت ہے یعنی س اور اس کا قطبی علی الترتیب منحنی کا ماسکہ اور مرتب ہیں۔

نوٹ۔ اگر س کا قطبی لاتناہی پر کا خط ہو تو ظل کا منحنی ایک دائرہ ہوگا (دفعہ ۹۳)۔

ہم یہاں یہ کہہ سکتے ہیں کہ دائرہ کے متعلق یہ خیال کیا جا سکتا ہے کہ وہ ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتا ہے، ماسکہ مرکز پر ہوگا اور مرتب لاتناہی پر کا خط ہوگا۔ اِسکا خروج المرکز وہ نسبت ہے جو اس کے نصف قطر کو اُس لاتناہی فاصلہ کے ساتھ ہے جو لاتناہی پر کے خط سے دائرہ کے نقطوں کا ہے۔

۹۵۔ متوازی وتر۔

ہم اول متوازی وتروں کے متعلق ایک بہت ہی اہم مسئلہ ثابت کرینگے اور اس کے بعد ایک دائرہ کے ظل کے منحنیوں کی مرتب اور ماسکہ کی خاصیت یہ دکھا کر ثابت کرینگے کہ ان تمام منحنیوں کیلئے کم از کم ایک نقطہ س موجود ہوتا ہے جس میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے زوج ایک قائم درپیچ بناتے ہیں۔

مسئلہ۔ کسی مخروطی تراش (یا دائرہ کے ظل کے منحنی) میں متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے اور یہ خط منحنی سے جن نقطوں پر ملتا ہے اُن پر کے مماس وتروں کے متوازی ہوتے ہیں۔

مزید بریں متوازی وتروں میں سے ہر ایک کے سروں پر کے مماس اُس خط پر متقاطع ہونگے جو وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ہے اور ہر وہ خط جو وتروں کے متوازی اور منحنی کے مستوی میں ہو اس خط کے ساتھ جس میں وسطی نقطے واقع ہیں مزدوج ہوگا۔

فرض کرو کہ متوازی وتروں کے نظام میں سے ایک وتر ق قَ ہے اور اسکا وسطی نقطہ م ہے۔

اِن وتروں کے متعلق یہ خیال کیا جا سکتا ہے کہ وہ لاتناہی پر کے ایک نقطہ ک پر جو خط منعدم پر کے ایک نقطہ ر کا ظل ہے متقاطع

ہوتے ہیں۔ چنانچہ حاصل ہوتا ہے

(ق قَ ، ھ ر۱) = -۱

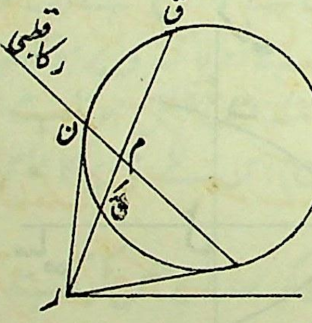
∴ (ق قَ ، م ر) = -۱

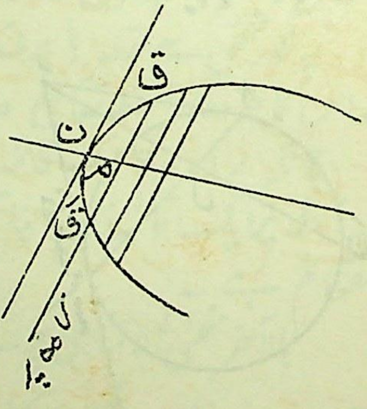
یعنے م ، ر کے قطبی پر ہے۔

پس چونکہ نقطہ م کا طریق ایک خط ہے اس لئے نقطہ ھ کا طریق بھی ایک خط ہے۔

فرض کرو کہ ن ایک نقطہ ہے جس پر یہ طریق منحنی سے ملتا ہے اور فرض کرو کہ نَ ، ن کا ظل ہے، تب چونکہ ن پر کا مماس ر میں سے گذرتا ہے نَ پر کا مماس ر۱ میں سے گذرنا چاہیئے۔ یعنے ن پر کا مماس، ق قَ کے متوازی ہے۔

نیز چونکہ ق اور قَ پر کے مماس ر کے قطبی پر ملتے ہیں ق اور قَ پر کے مماس ر کے قطبی کے ظل پر ملینگے یعنی اُس خط پر جو وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ہے۔





نیز ر میں سے گذرنیوالے ہر خط کا قطب، ر کے قطبی پر ہو گا اور اس لئے ر۱ میں سے گذرنیوالے ہر خط (جو مخروطی کے مستوی میں ہو) کا قطب خط ن ھ پر ہوگا یعنے ہر وہ خط جو وتروں کے متوازی ہو

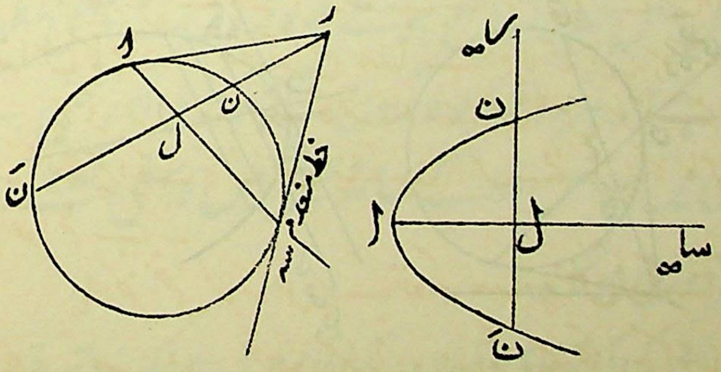
اِن کے وسطی نقطوں کے طریق کے ساتھ مزدوج ہوگا۔

دوسرے الفاظ میں اُس خط پر کے ہر نقطہ کا قطبی جو متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ہے ایک خط ہوگا جو وتروں کے متوازی ہوگا۔

۹۶ - ماسکہ اور مرتب کی خاصیت کا ثبوت۔

اب ہم مخروطی تراشوں کی (جنکی تعریف ایک دائرہ کے ظلوں کے طور پر کیگئی ہے) ماسکہ اور مرتب کی خاصیت ثابت کرسکتے ہیں۔ ہم قطع مکافی، قطع ناقص اور قطع زائد کو ایک ایک کرکے لیں گے اور ہر صورت میں ایک ابتدائی مسئلہ ثابت کرینگے جو اِن کے تشاکل کے محوروں سے متعلق ہوگا۔

مسئلہ۔ قطع مکافی (یا دائرہ کا ظل جبکہ خط معدوم دائرہ کو اس کے مستوی میں مس کرے) تشاکل کا ایک محور رکھتا ہے جو منحنی سے دو نقطوں پر ملتا ہے جنمیں سے ایک لاتناہی پر ہوتا ہے۔



(97)

فرض کرو کہ خط معدوم منحنی سے سہ پر ملتا ہے۔
اُس مستوی میں جو ظل کے راس ظ اور خط معدوم میں سے

گذرتا ہے ایک خط طر، طسہ کے علی القوائم کھینچو جو خط منعدم سے ر میں ملے۔ دائرہ کا دوسرا مماس ر ا کھینچو۔

اب ر، ا سہ کا قطب ہے اور اس لئے اگر ن نَ کوئی وتر ہو جو بڑھانے پر ر میں سے گذرتا ہے اور ا سہ کو ل پر قطع کرتا ہے تو

(ن نَ، ل ر) = -۱

پس ظل میں متناظر بڑے حروف استعمال کرنے اور یہ یاد رکھنے سے کہ ر ل سہ ایک قائمہ زاوئے میں مُظلل ہوگا کیونکہ ر سہ، ط پر ایک قائمہ زاویہ بناتا ہے ہمیں ایک وتر ن نَ حاصل ہوگا جو ا سا کے علی القوائم ہوگا اور اِسے ل پر قطع کریگا اور اس لئے

(ن نَ، ل را) = -۱

لیکن را لاتناہی پر ہے

∴ ن ل = ل نَ

اس طرح وہ تمام وتر جو ا سا پر عمود ہوں اس سے تنصیف ہوتے ہیں اور اس لئے منحنی اِس خط کے گرد متشاکل ہے، اِس خط کو قطع مکافی کا محور کہتے ہیں۔

یہ محور منحنی سے نقطہ ا پر ملتا ہے جسے راس کہتے ہیں اور منحنی کے ساتھ اس کا جو دوسرا نقطہ تقاطع سا ہے وہ لاتناہی پر ہوتا ہے۔

چونکہ ر ا سہ ایک قائمہ زاوئے میں مُظلل ہوتا ہے (کیونکہ ر سہ، ط پر ایک قائمہ زاویہ بناتا ہے) اس لئے ا پر کا مماس محور کے علی القوائم ہے۔

بالآخر منحنی، لاتناہی پر کے خط کو سا پر مس کرتا ہے۔

۹۷ — مسئلہ۔ قطع مکافی (یا دائرہ کا ظل جبکہ خط منعدم دائرہ کو مس کرے) ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتا ہے اور اس منحنی کا خروج المرکز اکائی ہوتا ہے۔

(98) فرض کرو کہ ظِل کے منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے۔ فرض کرو کہ ن میں سے گذرنیوالا وتر ن ل نَ ہے جو محور پر عمود ہے اور اسے ل پر قطع کرتا ہے۔

ن اور نَ پر کے مماس محور کے خط پر ایک نقطہ ت پر متقاطع ہونگے (دفعہ ۹۵)۔

اب چونکہ ن نَ کا قطب ت ہے اسلئے

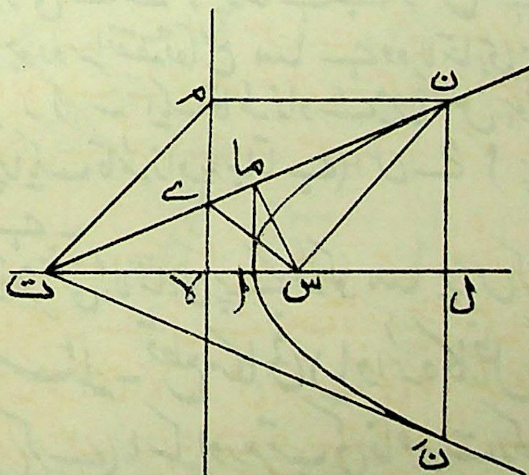
(ت ل، ا سا) = -۱

∴ ت ا = ا ل کیونکہ سا لاتناہی پر ہے۔

اب فرض کرو کہ ن پر کا مماس، ا پر کے مماس سے نقطہ ما پر ملتا ہے۔ ما س، ن ما پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ وہ محور سے س پر ملتا ہے۔

س کا قطبی محور کے علی القوائم ہوگا (دفعہ ۹۵)۔ فرض کرو کہ یہ قطبی لا م ہے اور وہ محور کو لا پر، ن پر کے مماس کو ے پر اور ن میں سے گذرنے والے محور کے متوازی خط کو م پر قطع کرتا ہے۔

س ن، س ے کو مِلاؤ۔



اب چونکہ لا م کا قطب س ہے اس لئے

(لا س، اِ سا) = -۱

لا ا = ا س اور چونکہ ت ا = ا ل اس لئے ت س = لا ل = م ن

لیکن ت ما : مان = ت ا : ا ل = ۱، اس لئے

∆ ت ماس ≡ ∆ ن ماس اور ت س = ن س۔

پس ن س = ن م یعنی ن، س سے اور س کے قطبی سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

(99) نیز چونکہ س ت، ن م کے مساوی اور اسکے متوازی ہے اور س ن = ن م اس لئے س ن م ت ایک معین (Rhombus) ہے اور ن ت، زاویہ س ن م کی تنصیف کرتا ہے۔

اس طرح ∆ س ن ے ≡ ∆ م ن ے

اور ∠ ے س ن = ∠ ے م ن = ایک قائمہ زاویہ

اب س ن کا قطب ے ہے کیونکہ ے کا قطبی س میں سے (جسکی وجہ یہ ہے کہ س کا قطبی ے میں سے گذرتا ہے) اور ن میں سے (کیونکہ ے ن، ن پر مماس ہے) گذرنا چاہئے۔

پس س ے اور س ن، منحنی کے مزدوج خطوط ہیں اور وہ ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ اسی طرح س ت اور وہ خط جو س میں سے گذرتا ہے اور س ت پر عمود ہے مزدوج خطوط ہیں۔

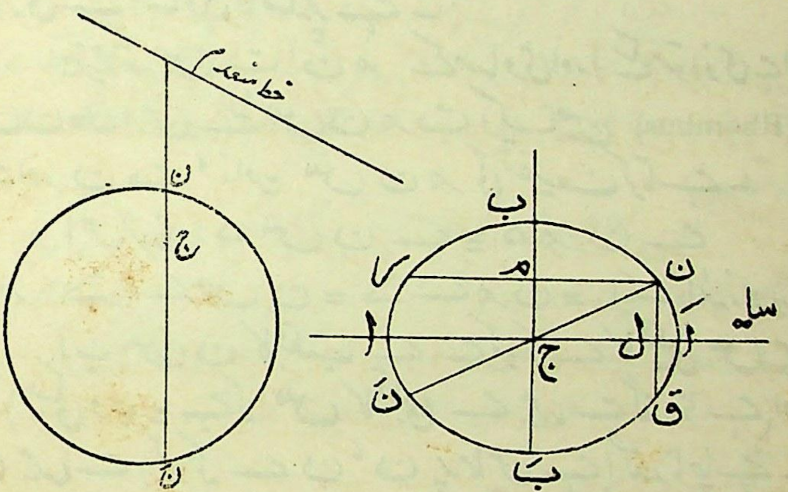
اس لئے وہ دربیچ پنسل جو س میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے زوجوں سے بنتی ہے ایک قائم دربیچ پنسل ہے۔ اس طرح س اور اس کا قطبی لا م علی الترتیب منحنی کا ماسکہ اور مرتب ہیں اور خروج المرکز س ن : ن م ہے جو اکائی ہے۔

۹۸ ـ دائرہ کا وہ ظِل جبکہ خط منعدم دائرہ سے نہ ملے یا تو

ایک دائرہ ہوگا یا ایک بند منحنی جس کے تشاکل کے دو باہم عمود وار محور ہونگے جنپر منحنی غیر مساوی طول کے وتر منقطع کریگا۔

فرض کرو کہ خط منعدم کا قطب ج ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ کا کوئی وتر ن نَ ہے جو ج میں سے گذرتا ہے۔



تب ن نَ، ج پر اور ج کے قطبی کے ساتھ اس کے نقطہ تقاطع پر موسیقی طور پر تقسیم ہوتا ہے۔ (100)

ظل میں متناظر بڑے حروف استعمال کرنے سے ہمیں معلوم ہوگا کہ ج میں سے گذرنے والا وتر ن نَ، ج پر اور ج کے قطبی کے ساتھ اس کے نقطہ تقاطع پر موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے جہاں ج کا قطبی لاتناہی پر کا خط ہے۔

ن ج = ن جَ ∴

اس طرح ج میں سے گذرنے والا ہر وتر ج پر تنصیف ہوتا ہے۔

اسی وجہ سے نقطہ ج کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں اور اسمیں سے گذرنے والے وتروں کو قطر کہتے ہیں۔

کسی قطر کے سروں پر کے مماس متوازی ہوتے ہیں کیونکہ ج میں سے گذرنے والے (دائرہ کے) وتروں کے سروں پر کے مماس ج کے قطبی پر ملتے ہیں جو خط معدوم ہے۔

اول فرض کرو کہ وہ درپیچ پنسل جو ج میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے زوجوں سے مبنی ہے ایک قائم درپیچ پنسل ہے تو ظل کا منحنی ایک دائرہ ہوگا (دفعہ ۹۳)۔

ثانیاً فرض کرو کہ درپیچ پنسل قائم نہیں ہے تو ج میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کا ایک اور صرف ایک زوج باہم علی القوائم ہونا چاہیئے (دفعہ ۸۶)۔

فرض کرو کہ منحنی ان خطوں پر وتر ا اَ اور ب بَ منقطع کرتا ہے۔

وتر ن ق اور ن ر، ا اَ اور ب بَ پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ یہ عمود انہیں علی الترتیب ل اور م پر قطع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ا اَ اور ب بَ کے خطوں پر لا انتہا ہی پر کے نقطے سا اور سَا ہیں۔

اب چونکہ ا اَ کا قطب سَا ہے اور ن ق، سَا میں سے گذرتا ہے اس لئے

(ن ق، ل سا) = -۱

∴ ن ل = ل ق

اسی طرح ن م = م ر

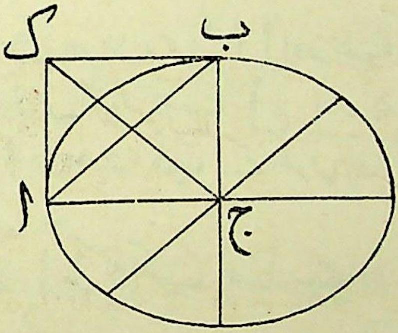
اس طرح منحنی ان دو خطوں ا ج اَ، ب ج بَ میں سے ہر ایک کے گرد متشاکل ہے۔ ان خطوں کو محور کہتے ہیں۔

اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ ا اَ اور ب بَ مساوی نہیں ہو سکتے
فرض کرو کہ ا اور ب پر کے مماس ک پر ملتے ہیں تو ج اک ب
ایک مستطیل ہے اور ج ک اب کی تنصیف کرتا ہے۔

لیکن ج ک اس وتر کی تنصیف کرتا ہے جو ج میں سے گذرتا ہے اور اب کے متوازی ہے کیونکہ ج میں سے گذرنے والا ہر وتر ج پر تنصیف ہوتا ہے۔

اِس لئے ج ک اور وہ خط جو ج میں سے گذرتا ہے اور اب کے متوازی ہے مزدوج خطوط ہیں (دفعہ ۹۵)۔

لیکن یہ خطوط علی القوائم ہونگے اگر ج ا = ج ب۔ پس اگر (101)
ج ا اور ج ب مساوی ہوں تو وہ درپیچ پنسل جو ج میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں سے بنتی ہے قائم درپیچ پنسل ہوگی جو مفروضہ کے خلاف ہے۔



اس لئے ا اَ اور ب بَ مساوی نہیں ہو سکتے۔

ہم ا اَ کو ب بَ سے بڑا فرض کرینگے۔ تب ا اَ کو محور اعظم اور ب بَ کو محور اصغر کہا جاتا ہے۔

۹۹۔ مسئلہ۔ قطع ناقص (یا ایک دائرہ کے ظل کا منحنی

جبکہ دائرہ کو خط منعدم اُس کے مستوی میں نہ ملے اور دائرہ کا ظِل ایک دوسرا دائرہ نہ ہو) ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتا ہے اور اِس منحنی کا خروج المرکز اکائی سے کم ہوتا ہے۔

یہ تسلیم کر لینے کے بعد کہ ظل دائرہ نہیں ہے ہمیں دفعہ ۹۸ کی بموجب تشاکل کے دو محور اا' اور ب ب' حاصل ہوتے ہیں جن میں سے اا' بڑا ہے۔

ب کو مرکز مانکر اور ج ا کے مساوی نصف قطر لیکر ایک دائرہ بناؤ جو محور اعظم کو س اور س' پر قطع کرے۔

س اور س' کے قطبی، اا' پر عمود ہوں گے (دفعہ ۹۵)۔

فرض کرو کہ یہ عمود لا ف اور لا' ف' ہیں جو اا' کو لا اور لا' پر اور ب پر کے مماس کو ف اور ف' پر قطع کرتے ہیں۔

اب چونکہ س کا قطبی ف میں سے گذرتا ہے اسلئے ف کا قطبی س میں سے گذریگا لیکن ف کا قطبی ب میں سے گذرتا ہے کیونکہ ف ب مماس ہے۔

∴ س ب، ف کا قطبی ہے اور س ف اور س ب مزدوج خطوط ہیں۔

ہم ثابت کرینگے کہ یہ مزدوج خطوط باہم علی القوائم ہیں۔

چونکہ س، لا ف کا قطب ہے اس لئے

(اا'، س لا) = -۱

∴ ج س × ج لا = ج ا²

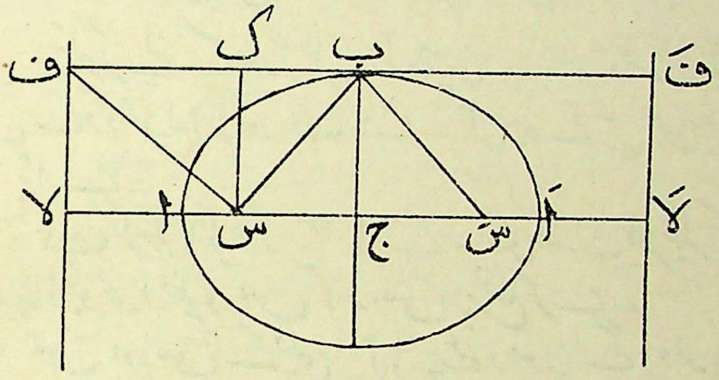
اب س ک، ج ب کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ب ف سے ک پر ملتا ہے۔ تب

ب ک × ک ف = ج س × س لا = ج س (ج لا - ج س)

= ج ا^{۲} - ج س^{۲}

= س ب^{۲} - ج س^{۲} = س ک^{۲}

∴ ف س ب ایک قائمہ زاویہ ہے۔



اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ س ہی سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے دو زوج یعنے س ف ، س ب اور س لا، س ک باہم علی القوائم حاصل ہوتے ہیں اس لئے وہ دربیچ پنسل جو س پر کے مزدوج خطوں سے بنتی ہے ایک قائم دربیچ پنسل ہے۔

∴ س اور اسکا قطبی لا ف ، منحنی کا ماسکہ اور مرتب ہیں (دفعہ ۹۴)۔

اسی طرح سَ اور اسکا قطبی لاَ فَ ، ماسکہ اور مرتب ہیں۔

خروج المرکز = س ب : ب ف = ج ا : ج لا

جو اکائی سے کم ہے۔

یہ بھی قابل یادداشت ہے کہ چونکہ ج س × ج لا = ج ا^{۲}

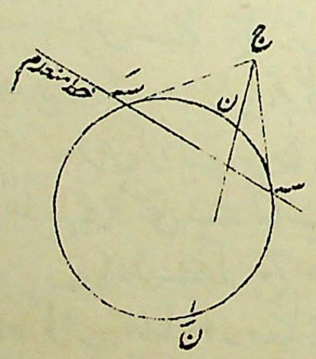
اس لئے خروج المرکز = ج س × ج ا۔

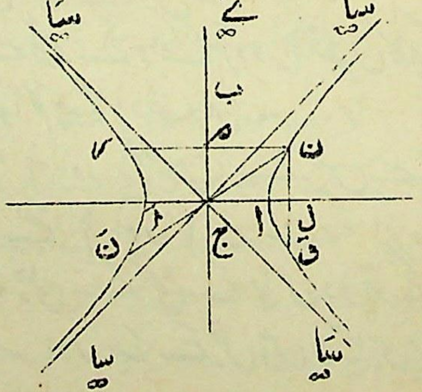
نوٹ — اب ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ کس طرح ایک دائرہ کو ایک قطع ناقص کی انتہائی صورت سمجھا جا سکتا ہے جبکہ م سکے س اور سَ اس کے مرکز پر منطبق ہوں اور اس کا مرتب لاتناہی پر کا خط ہو (دیکھو نوٹ دفعہ ۹۴)-

۱۰۰ — قطع زائد (یا ایک دائرہ کا ظل جبکہ دائرہ کو خط منعدم قطع کرے) تشاکل کے دو محور رکھتا ہے جو باہم علی القوائم ہوتے ہیں اور جن میں سے صرف ایک منحنی کو قطع کرتا ہے —

فرض کرو کہ خط منعدم دائرہ کو نقطوں سہ اور سَہ پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ اس خط کا قطب ج ہے —

فرض کرو کہ ن نَ کوئی وتر ہے جس کا خط ج میں سے گزرتا ہے تو ن نَ ج پر اور سہ سَہ کے ساتھ اس کے نقطہ تقاطع پر موسیقی نسبت میں تقسیم ہوگا —





ظِل میں متناظر بڑے حروف استعمال کرنے سے معلوم ہوگا کہ ج میں سے گذرنے والا وتر ن نَ، ج پر اور ج کے قطبی کے ساتھ اِس کے نقطہ تقاطع پر موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے جہاں ج کا قطبی لاتناہی پر کا خط ہے۔

∴ ن ج = ج نَ

پس ظِل کے منحنی میں ہر وہ وتر جو ج میں سے گذرتا ہے ج پر تنصیف ہوتا ہے، اس لئے ج کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں اور ج میں سے گذرنے والے وتر قطر کہلاتے ہیں۔

یہ یاد رہے کہ ج میں سے گذرنے والا ہر خط منحنی سے نہیں ملتا کیونکہ دائرہ کے مستوی میں ایسے خطوط موجود ہیں جو ج میں سے گذرتے ہیں لیکن دائرہ کو قطع نہیں کرتے۔

ج میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے ہر زوج میں سے صرف ایک خط دائرہ سے ملیگا کیونکہ ج سہ اور ج سَہ اُس درپیچ کے دوہرے خطوط ہیں جو اِن مزدوج خطوں سے بنتا ہے۔

نیز وہ درپیچ پنسل جو ج میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں سے بنتی ہے ایک قائم پنسل نہیں ہو سکتی کیونکہ وہ حقیقی دوہرے خطوط رکھتی ہے۔ یعنی ج سہ اور ج سَہ کے ظِل۔

اس لئے ج میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کا ایک اور صرف ایک زوج باہم علی القوائم ہوگا (دفعہ ۸۶)۔

فرض کرو کہ یہ زوج ج ا اور ج ب ہے جنمیں سے ج ا (104)
وہ خط ہے جو منحنی سے ملتا ہے یعنے ا اور اَ پر۔

یہ یاد رہے کہ ج سے ظِل کے منحنی کے مماس دو ہونگے جنکے نقاط تماس سہا اور سَہا جو سہ اور سَہ کے ظِل ہیں لاتناہی پر ہونگے

اِن مماسوں کو **متقارب** کہتے ہیں۔

چونکہ ج سا اور ج سَا اُس درپیچ پنسل کے دوہرے خطوط ہیں جو ج میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں سے منتج ہے اسلئے

ج (سا سَا، ا ب) = -۱ (دفعہ ۸۲)

∴ چونکہ ج ا اور ج ب باہم علی القوائم ہیں وہ ج سا اور ج سَا کے درمیانی زاویوں کے ناصف ہیں (دفعہ ۷۲)۔

اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ منحنی ج ا اور ج ب کے گرد متشاکل ہے ن ق اور ن ر، ج ا اور ج ب پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ یہ عمود ج ا اور ج ب کو ل اور م پر قطع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ج ا اور ج ب پر لامتناہی پر کے نقطے ے اور ےَ ہیں تب چونکہ ا اَ کا قطب ے ہے اور ن ق، ےَ میں سے گذرتا ہے اس لئے

(ن ق، ل ے) = -۱

∴ ن ل = ل ق

اسی طرح ن م = م ر

پس منحنی متشاکل کے دو محور باہم علی القوائم رکھتا ہے جنمیں سے ایک منحنی سے ملتا ہے اور دوسرا نہیں۔ ا اَ جو منحنی سے ملتا ہے قاطع محور کہلاتا ہے اور ج ب کو مزدوج محور کہتے ہیں۔

نوٹ۔ فی الحال ب، ج ب پر کوئی معین نقطہ نہیں ہے، آئندہ اس نقطہ کو معین کرنے میں سہولت ہوگی۔ یہاں جس بات پر زور دینا مقصود ہے وہ یہ ہے کہ مزدوج محور منحنی کو قطع نہیں کرتا اور ہم اس پر نقطے ب اور بَ اس طرح متعین نہیں کر سکتے جیسا کہ ہم نے قطع ناقص کی صورت میں کیا تھا۔

۱۰۱۔ مسئلہ۔ قطع زائد (یا ایک دائرہ کے ظل کا منحنی

جبکہ خط مستعدم دائرہ کو قطع کرے) ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتا ہے اور اسکا خروج المرکز اکائی سے بڑا ہوتا ہے۔

دفعہ ماسبق کی ترقیم استعمال کرو اور ج کو مرکز اور ج ا کو نصف قطر مانکر ایک دائرہ کھینچو جو ج سا کو ک اور گ پر اور ج سَا کو کَ اور گَ پر قطع کرے۔ دیکھو شکل۔

خطوط ک گ اور کَ گَ قاطع محور پر عمود ہونگے کیونکہ ہم دیکھ چکے کہ ج ا، زاویہ سا ج سَا کی تنصیف کرتا ہے۔

ث ک گ اور کَ گَ کے قطب جنکو ہم س اور سَ (105)
سے تعبیر کرینگے قاطع محور کے خط پر واقع ہونگے (دفعہ ۹۵)

اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ س اور اس کا قطبی ک گ علی الترتیب ماسکہ اور مرتب ہیں، اسی طرح سَ اور کَ گَ بھی ماسکہ اور مرتب ہیں

فرض کرو کہ ک گ اور کَ گَ، ا اَ کو لا اور لَا پہ قطع کرتے ہیں۔

قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت کی رو سے

(ا اَ، س لا) = -۱

ث $\text{ج س} \times \text{ج لا} = \text{ج ا}^2 = \text{ج ک}^2$

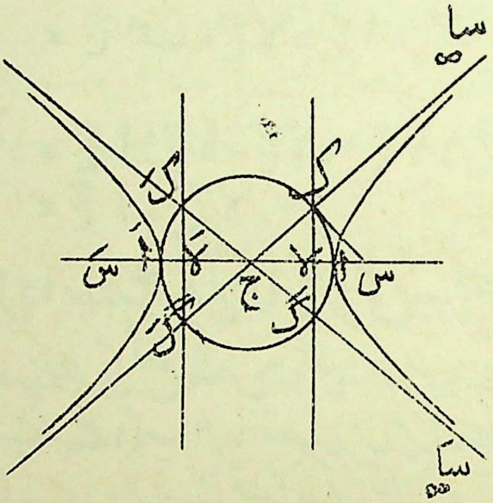
ث ج ک س ایک قائمہ زاویہ ہے۔

اب ک کا قطبی س میں سے گذرنا چاہیے کیونکہ س کا قطبی ک میں سے گذرتا ہے۔ مزید بریں ک کا قطبی سا میں سے گذرتا ہے کیونکہ ک سا، سا پر منحنی کا مماس ہے۔

ث س سا، ک کا قطبی ہے یعنی س ک اور س سا مزدوج خطوط ہیں۔

لیکن سا لاتناہی پر ہے اس لئے س سا' ک' سا کے متوازی ہے یعنی س سا' س ک پر عمود ہے۔

اس طرح س میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے دو زوج باہم علی القوائم حاصل ہوتے ہیں یعنے ایک س سا اور س ک اور دوسرا س ج اور س میں سے گذرنے والا وہ خط جو س ج کے علی القوائم ہے (دفعہ ۹۵)



اس لئے وہ پنسل جو س میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں سے بنتی ہے ایک قائم پنسل ہے اور اس لئے س اور اسکا قطبی ک گ علی الترتیب ماسکہ اور مرتب ہیں۔

(108) اسی طرح س' اور ک' گ' ماسکہ اور مرتب ہیں۔

خروج المرکز وہ نسبت ہے جو

= س سا : س سے ک گ پر عمود

= ک سا : " " "

= ج ک : ج لا = ج ا : ج لا جو اکائی سے بڑی ہے۔

نیز چونکہ ج س × ج لا = ج ا^{۲} اس لئے خروج المرکز

= ج س : ج ا

ہم خروج المرکز اس طرح بھی حاصل کر سکتے ہیں :-

خروج المرکز وہ نسبت ہے جو

= س ا : ا لا

= ج س - ج ا : ج ا - ج لا

= ج س × ج لا - ج ا × ج لا : ج لا (ج ا

- ج لا)

= ج ا (ج ا - ج لا) : ج لا (ج ا - ج لا)

= ج ا : ج لا

۱۰۲ — مرکزدار اور غیر مرکزدار مخروطی — قطر —

ہم دیکھ چکے ہیں کہ قطع ناقص اور قطع زائد میں سے ہر ایک کا ایک مرکز ہوتا ہے یعنے ایک ایسا نقطہ کہ اس میں سے گذرنیوالا ہر وتر اسپر تنصیف ہوتا ہے۔ اس لئے قطعات ناقص اور قطعات زائد کو باہم ایک جماعت میں رکھکر انہیں مرکزدار مخروطیاں کہتے ہیں قطع مکافی کا کوئی مرکز نہیں ہوتا اور اسلئے اُسے غیر مرکزدار مخروطی کہتے ہیں۔

ہم دفعہ ۹۵ میں یہ ثابت کر چکے ہیں کہ متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔ مرکزدار مخروطیوں کی صورت میں صریحاً یہ خط مستقیم مرکز میں سے گذرنا چاہئیے کیونکہ وتروں کے متوازی جو قطر ہوگا وہ مرکز پر تنصیف ہوگا۔

قطع مکافی کی صورت میں وہ خط جو متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ہے محور کے متوازی ہوتا ہے۔ کیونکہ کوئی ایسا نظام

دائرہ کے اُن وتروں کا ظل ہوتا ہے جو خط منعدم پر کے ایک نقطہ ل پر ملتے ہیں، اور ر کا قطبی جس کا ظل وتروں کے نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ہے نقطہ سہ بس سے گذرتا ہے جو خط منعدم کے ساتھ دائرہ کا نقطہ تماس ہے۔ اس طرح قطع مکافی کے متوازی وتروں کے نظام کے وسطی نقطوں کا طریق سا میں سے گذرتا ہے یعنی یہ خط محور کے متوازی ہے۔

پس وہ تمام خطوط جو قطع مکافی کے مُستوی میں ہوں اور اس کے محور کے متوازی ہوں ان میں سے ہر ایک متوازی وتروں کے ایک نظام کی تنصیف کریگا۔ یہ خطوط قطع مکافی کے قطر کہلاتے ہیں۔ یہ اُس مفہوم میں قطر نہیں ہیں جس میں مرکزدار مخروطیوں کے قطر ہوتے ہیں کیونکہ وہ طول میں محدود نہیں ہوتے اور نہ کسی معیُن نقطہ پر تنصیف ہوتے ہیں۔ (107)

۱۰۳۔ قطروں کے معیُن۔

تعریف۔ کسی مخروطی کے متوازی وتر جو کسی مخصوص قطر سے تنصیف ہوں اِس قطر کے دوہرے معیُن کہلاتے ہیں اور نصف وتر کو اِس قطر کا معیُن کہتے ہیں۔

کسی قطر کے معیُن جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں اُس نقطہ یا نقطوں پر کے مماسوں کے متوازی ہوتے ہیں جن پر قطر منحنی سے ملتا ہے۔

کسی مخروطی کے محور کے معیُن اِس محور پر عمود ہوتے ہیں۔

کسی قطع مکافی کے محور کے معین، کسی قطع ناقص کے محور اعظم کے معیُن اور کسی قطع زائد کے قاطع محور کے معیُن اکثر صرف "معیُن" کہلاتے ہیں اور اس کی تخصیص نہیں کی جاتی کہ وہ کہاں کے معین ہیں مثلاً ایک قطع مکافی، قطع ناقص یا قطع زائد پر کے کسی نقطہ ن کے "معیُن" سے مراد وہ عمود ن ل لینا چاہئے جو محور پر، محور اعظم پر یا قاطع محور پر جیسی کہ صورت ہو کھینچا گیا ہو۔

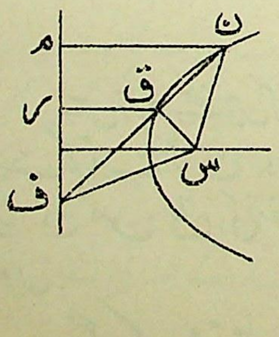
نوٹ۔ جب ہم مخروطی کا محور کہتے ہیں تو قطع مکافی کی صورت میں کوئی ابہام پیدا نہیں ہو سکتا لیکن قطع ناقص اور زائد کی صورت میں جنہیں تشاکل کے دو محور ہوتے ہیں ابہام ہوگا اگر ہم قبل از قبل یہ نہ بتا دیں کہ کونسا محور مراد ہے۔ پس ہم یہ قرارداد اختیار کرتے ہیں کہ کسی مخروطی کے محور سے وہ محور مراد ہوگا جس پر ماسکے واقع ہوتے ہیں

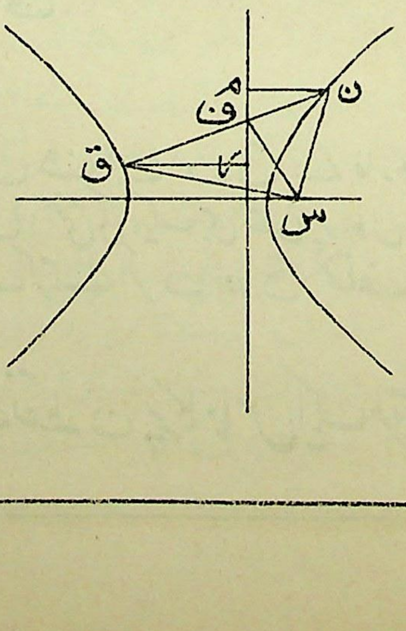
۱۰۴۔ اس باب کے مضامین مخروطی تراشوں کو صحیح طور پر سمجھنے کے لئے بڑے اہم ہیں۔ طالب علم کے ذہن میں ابتک منحنیوں کی شکل کا ایک بہت ہی اچھا عام تصور پیدا ہو چکا ہوگا گویا کہ وہ انہیں دیکھ رہا ہے یہ سمجھتے ہوئے کہ وہ ایک دائرہ کو ایک مستوی سے دوسرے مستوی پر منتقل کرنے سے حاصل ہوئے ہیں۔ ہم آئندہ باب میں وہ خواص بیان کرینگے جو سب مخروطیوں میں مشترک ہیں اور اس کے بعد والے ابواب میں قطع مکافی، ناقص اور زائد پر الگ الگ بحث کرینگے اور یہ دکھائینگے کہ ہر ایک منحنی کے امتیازی خواص کیا ہیں۔

دسواں باب

خواص جو سب مخروطیوں میں مشترک ہیں

۱۰۵ — مسئلہ — اگر وہ خط (ممدودہ بضرورت) جو ایک مخروطی کے نقطوں ن اور ق کو ملاتا ہے ایک مرتب سے ف پر ملے اور نظیری ماسکہ س ہو تو خط س ف، س ن اور س ق کے درمیانی زاویوں میں سے ایک زاویہ کی تنصیف کریگا۔





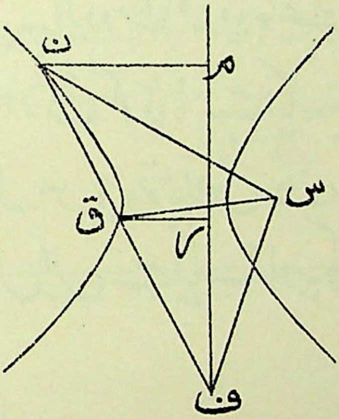
ن م اور ق ر ا مرتب پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ خروج المرکز ز ہے تو

س ن : ن م = ز = س ق : ق ر

∴ س ن : س ق = ن م : ق ر

= ف ن : ف ق (متشابہ
مثلثوں ف ق ر اور ف ن م سے)

∴ اشکال (۱) اور (۳) میں س ف، ن س ق کے خارجی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے اور شکل (۲) میں خود زاویہ ن س ق کی تنصیف کرتا ہے۔ (108)



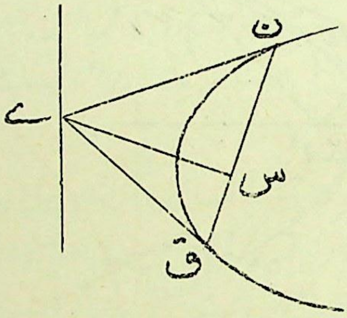
پس ہم دیکھتے ہیں کہ س ف، ن س ق کے خارجی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے اگر ن اور ق منحنی کی ایک ہی شاخ پر ہوں اور خود زاویہ ن س ق کی تنصیف کرتا ہے اگر ن اور ق مختلف شاخوں پر ہوں۔

۱۰۶ - اگر ایک مخروطی کے نقطہ ن پر کا مماس ایک مرتب سے

ے پر ملے اور نظیری ماسکہ س ہو تو زاویہ ے س ن ایک قائمہ زاویہ ہوگا۔

حسب ذیل امور سے یہ مسئلہ آسانی کے ساتھ اخذ ہوتا ہے۔

ماسکہ اور مرتب مخروطی کے لئے "قطب اور قطبی" ہیں، اس لئے کسی ماسکی وتر ن س ق کے سروں پر کے مماس مرتب پر ایک نقطہ ے میں ملینگے اور ے، ن ق کا قطب ہوگا



پس س ے اور س ن مزدوج خطوط ہیں کیونکہ س ن کا قطب س ے پر واقع ہے۔

(110) لیکن ماسکہ میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے زوج علی القوائم ہوتے ہیں۔ اس لئے ے س ن ایک قائمہ زاویہ ہے۔

لیکن چونکہ ہم آیندہ دفعہ میں یہ ثابت کرینگے کہ ہر مستوی منحنی جو ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھے کسی نہ کسی دائرہ کا ظل ہوتا ہے اسلئے ہم اس مسئلہ کا دوسرا ثبوت دینگے جو صرف اس خاصیت پر منحصر ہوگا۔

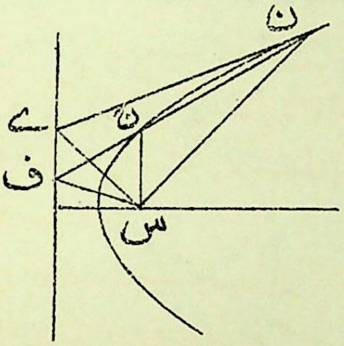
نقطہ ن پر کے مماس کو وتر ن نَ کے خط کی انتہائی صورت سمجھو جبکہ نَ، ن کے بہت ہی قریب ہو۔

اب اگر ن نَ مرتب سے ف پر ملے تو س ف، ن س نَ

کے خارجہ زاویہ کی تنصیف کرتا ہے (دفعہ ۱۰۵) کیونکہ ن اور نَ ایک ہی شاخ پر ہیں۔

اور اس لئے نَ جتنا ن کے قریب آئیگا یہ خارجہ زاویہ دو قائمہ زاویوں سے قریب تر ہوتا جائیگا۔

پس زاویہ ے س ن = ف س نَ کی انتہا جبکہ نَ ن پر پہنچے
= ایک قائمہ زاویہ



یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس دوسرے ثبوت سے یہ نتیجہ بھی برآمد ہوتا ہے کہ ایک ماسکی وتر کے سروں پر کے مماس مرتب پر متقاطع ہوتے ہیں کیونکہ وتر ن س ق کے کسی ایک سرے پر کا مماس، س ے کو وتر کے علی القوائم کھینچنے سے معلوم کیا جاتا ہے تاکہ وہ مرتب سے ے پر ملے، تب ے نَ اور ے ق مماس ہوتے ہیں۔

۱۰۷۔ پچھلے باب میں ہم نے مخروطی تراشوں کی تعریف یہ کی تھی کہ وہ ایک دائرہ کے ظل کے منحنی ہیں اور یہ ثابت کیا تھا کہ وہ ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتے ہیں۔ اب ہم اسکا عکس مسئلہ ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ۔ ہر مستوی منحنی جو ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھے کسی دائرہ کا ظل ہوتا ہے۔

ہم دفعہ ۱۰۶ کے دوسرے حصہ میں ثابت کر چکے ہیں کہ وہ منحنی جو

ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتا ہے ایسا ہوتا ہے کہ ماسکہ س میں سے گذرنیوالے کسی وتر کے سِروں پر کے مماس مرتب پر ایک ایسے خط کے ساتھ متقاطع ہوتے ہیں جو س میں سے گذرتا ہے اور وتر پر عمود ہے۔

اب اس طرح تظلیل کرو کہ مرتب خط منعدم ہو اور س پر کا قائم (111)
درپیچ ایک دوسرے قائم درپیچ میں مظلل ہو جائے (دفعہ ۸۷)۔

تب ظِل کے منحنی میں یہ خاصیت ہوگی کہ س کے ظِل س میں سے گذرنیوالے ہر وتر کے سِروں پر کے مماس ایک خط پر جو س میں سے گذرتا ہے اور وتر پر عمود ہے لانتناہی پر ملینگے۔

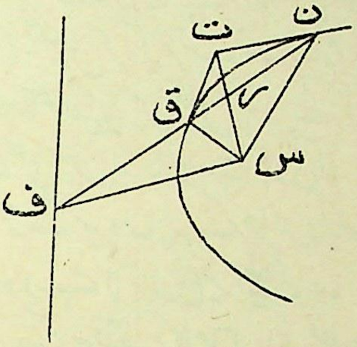
اس لئے منحنی کے ہر نقطہ پر کا مماس اُس نصف قطر کے علی القوائم ہوگا جو اس نقطہ کو س سے ملاتا ہے اور اس لئے یہ منحنی ایک دائرہ ہے جسکا مرکز س ہے۔

۱۰۸ — جو کچھ ہم نے پچھلے باب میں ثابت کیا ہے اس سے لازماً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھنے والے منحنی کا خروج المرکز اکائی ہو تو وہ دائرہ جس میں اسے مظلل کیا گیا ہے خط منعدم کو دائرہ کے مستوی میں مس کرتا ہے، اگر خروج المرکز اکائی سے کم ہو تو دائرہ خط منعدم سے نہیں ملتا اور اگر خروج المرکز اکائی سے بڑا ہو تو دائرہ خط منعدم سے منقطع ہوتا ہے۔

۱۰۹ — مماسوں کا زوج۔

مسئلہ۔ اگر ایک نقطہ ت سے مخروطی کے مماس ت ن، ت ق کھینچے جائیں اور س ایک ماسکہ ہو تو س ن اور س ق، س ت کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں اور اگر ن ق نظیری مرتب سے ف پر ملے تو

زاویہ ت س ف قائمہ ہوتا ہے۔

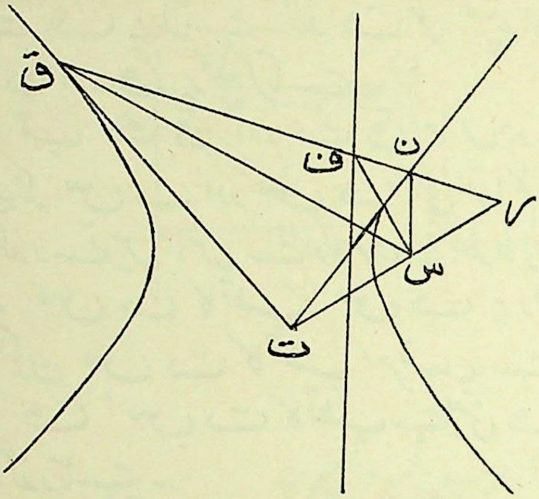


فرض کرو کہ ت س، ن ق سے ر پر ملتا ہے۔
چونکہ ن ق، ت کا قطبی ہے اور وہ ف میں سے گذرتا ہے (112)
اس لئے ف کا قطبی ت میں سے گذرنا چاہئے۔
لیکن چونکہ ف مرتب پر ہے ف کا قطبی س میں سے گذرنا چاہئے۔
اس لئے س ت، ف کا قطبی ہے۔
اس لئے س ف اور س ت مزدوج خطوط ہیں اور چونکہ وہ ماسکہ میں سے گذرتے ہیں اس لئے انہیں علی القوائم ہونا چاہئے۔

نیز (ن ق، ف ر) = -۱

∴ س (ن ق، ف ر) = -۱

اس طرح س ر اور س ف، س ن اور س ق کے درمیانی زاویوں کے ناصف ہیں (دفعہ ۷۲)۔



نوٹ ۔ یہ ظاہر ہے کہ ت سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاط تماس منحنی کی ایک ہی شاخ پر واقع ہوں تو س ت، زاویہ ن س ق کی تنصیف کریگا لیکن اگر وہ مختلف شاخوں پر واقع ہوں تو س ت، ن س ق کے خارجہ زاویہ کی تنصیف کریگا۔

شکلوں میں وہ صورت پیش نہیں کی گئی ہے جس میں ت ن اور ت ق دونوں اُس شاخ کو مس کرتے ہوں جو س سے دُور ہے۔ طالب علم آسانی کے ساتھ اس صورت کو خود ایک شکل بنا کر ظاہر کر سکتا ہے۔

۱۱۰ ۔ ایک بیرونی نقطہ سے مخروطی کے دو مماس کھینچنے کا ایک سادہ عمل مسئلہ بالا سے ملتا ہے۔

س ت کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ مخروطی سے ک اور کَ پر (113)
ملتا ہے۔ گذشتہ دفعہ کی شکل سے استفادہ کیا جا سکتا ہے۔ ک کَ میں ایک نقطہ ر ایسا لو کہ (ت ر، ک کَ) = -۱ (دفعہ ۰، نتیجہ صریح ۲)

س ف، س ت کے علی القوائم کھینچو اور فرض کرو کہ وہ مرتب سے ف پر ملتا ہے۔ خط ف ر کھینچو اور فرض کرو کہ وہ مخروطی کو ن اور ق پر قطع کرتا ہے۔

تب ت ن اور ت ق مماس ہونگے۔

کیونکہ س ت اور س ف علی القوائم ہیں اور ایک ماسکہ میں سے گذرتے ہیں، اس لئے وہ مزدوج خطوط ہیں۔

∴ س ت کا قطب، س ف پر واقع ہے۔

لیکن س ت کا قطب، مرتب پر ہے۔

∴ ف، س ت کا قطب ہے یعنی ف کا قطبی ت میں سے گذرتا ہے۔

∴ ت کا قطبی ف میں سے گذرتا ہے۔

لیکن ت کا قطبی ر میں سے گذرتا ہے کیونکہ (ت ر، ک ک') =

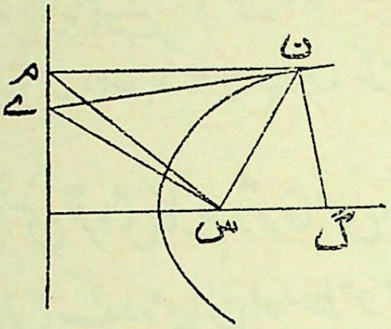
اس طرح خط ف ر، ت کا قطبی ہے یعنی ن ق، ت سے کھینچے ہوئے مماسوں کا وتر تماس ہے۔

۱۱۱ - عماد -

تعریف - وہ خط جو ایک مماس کے نقطہ تماس میں سے گذرے اور اس پر علی القوائم ہو اس نقطہ پر کا عماد کہلاتا ہے۔

مسئلہ - اگر کسی مخروطی کے نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملے اور س، مخروطی کا ایک ماسکہ ہو تو س گ = ز × س ن جہاں ز خروج المرکز ہے۔

فرض کرو کہ ن پر کا مماس اُس مرتب سے جو س کے متناظر ہے ے پر ملتا ہے۔



ن م' مرتب پر عمود کھینچو۔

اب چونکہ ن م' محور کے متوازی ہے اس لئے

∠م ن س = ∠ن س گ

نیز چونکہ ن م ے اور ن س ے قائمہ زاوئے ہیں اسلئے (114)

ن س ے م دائری ہے اور ∠س م ن = ∠س ے ن

= ∠س ن ے کا متمم = ∠س ن گ

اس طرح مثلثات س ن گ اور ن م س متشابہ ہیں اور

س گ : س ن = ن س : ن م = ز

س گ = ز × س ن ∴

طالب علم اپنے لئے وہ شکل بنا سکتا ہے جس سے وہ صورت تعبیر ہو سکے جس میں ن' ایک قطع زائد کی اُس شاخ پر واقع ہو جو س سے دور رہے اس صورت میں یہ معلوم ہوگا کہ

∠س م ن = ۱۸۰° - ∠س ے ن

= ۹۰° + ∠س ن ے = ∠س ن گ

اسلئے مثلثات س ن گ اور ن م س پھر بھی متشابہ ہیں۔

۱۱۲ — وتر خاص ۔

تعریف۔ وہ ماسکی وتر جو اُس محور پر عمود ہو جس پر ماسکہ واقع ہے مخروطی کا وتر خاص کہلاتا ہے۔

اس طرح وتر خاص وہ دوہرا مُعیّن ہے جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور محور پر عمود ہے۔

مسئلہ۔ کسی مخروطی کا نیم وتر خاص اس کے کسی ماسکی وتر کے مقطوعوں کے درمیان اوسط موسیقی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ س خ وتر خاص ہے اور ن س ق کوئی ماسکی وتر ہے۔

ن م اور ق ر، مرتب پر عمود کھینچو اور ن ل اور ق ک، محور پر عمود کھینچو۔

اب س ن : ن م = ز = س خ : س لا
= س ق : ق ر

اور متشابہ مثلثوں سے

س ن : س ق = س ل : ک س
= لا ل - لا س : لا س - لا ک (شکل ۱)
= م ن - لا س : لا س - ر ق
= ز (م ن - لا س) : ز (لا س - ر ق)
= س ن - س خ : س خ - س ق

∴ س ن، س خ، س ق سلسلہ موسیقیہ میں ہیں اور

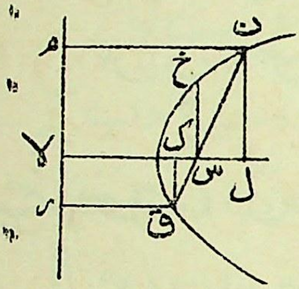
$$\frac{1}{\text{س ن}} + \frac{1}{\text{س ق}} = \frac{2}{\text{س خ}}$$

اگر ن اور ق مخالف شاخوں پر ہوں تو اس مسئلہ میں کچھ ترمیم کرنی ہو گی چنانچہ اس صورت میں

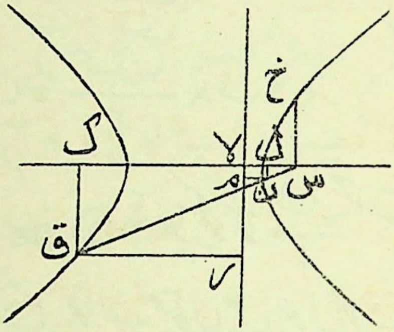
س ن : س ق = ل س : ک س = لا س - لا ن : ک لا + لا س (شکل ۲)

= ز (لا س - م ن) : ز (ق ر + لا س)

= س خ - س ن : س ق + س خ



شکل (۱)



شکل (۲)

∴ س ن (س ق + س خ) = س ق (س خ - س ن)

∴ س ق × س خ - س ن × س خ = ۲ س ن × س ق

$$\therefore \frac{۱}{\text{س ن}} - \frac{۱}{\text{س ق}} = \frac{۲}{\text{س خ}}$$

پس اس صورت میں س ن، س خ اور - س ق سلسلہ موسیقیہ میں ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح ۔ وہ مستطیل جو کسی ماسکی وتر کے مقطوعوں سے بنتا ہے اس وتر کے طول کے متناسب ہوتا ہے۔

کیونکہ

$$\frac{۱}{\text{س ن}} \pm \frac{۱}{\text{س ق}} = \frac{۲}{\text{س خ}}$$

بموجب اس کے کہ ن اور ق ایک ہی شاخ پر واقع ہوں یا مخالف شاخوں پر (جہاں ن اس شاخ پر ہے جو س کے قریب ہے)

اور اس لئے دونوں صورتوں میں

$$\frac{\text{ن ق}}{\text{س ن}\times\text{س ق}} = \frac{\text{۲}}{\text{س خ}}$$

$$\therefore\ \text{س ن}\times\text{س ق} = \frac{\text{س خ}}{\text{۲}}\times\text{ن ق}$$

یعنی $\text{س ن}\times\text{س ق} \propto \text{ن ق}$ (کیونکہ $\frac{\text{س خ}}{\text{۲}}$ مستقل ہے)۔

اگر س ن اور س ق مخالف سمتوں میں ہوں تو ن اور ق منحنی کی ایک ہی شاخ پر واقع ہوں گے اگر وہ ایک ہی سمت میں ہوں تو ن اور ق مخالف شاخوں پر واقع ہوں گے ۔

۱۱۳ ۔ مسئلہ ۔ کسی مخروطی کی تظلیل ایک دائرہ میں اس طرح کیجا سکتی ہے کہ مخروطی کے مستوی کا کوئی نقطہ دائرہ کے مرکز میں مظلل ہو ۔

کیونکہ فرض کرو کہ مخروطی کے مستوی میں کوئی نقطہ ن ہے ۔ (116)
ن کے قطبی کو خط منعدم کے طور پر لو اور اس طرح تظلیل کرو کہ ن میں سے گذرنیوالے مزدوج خطوں کے زوجوں سے بننے والی درپیچ پنسل ایک قائم درپیچ میں مظلل ہو جائے (دفعہ ۸۷)، تب ٹھیک دفعہ ۹۳ کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ظل کا منحنی ایک دائرہ ہے ۔

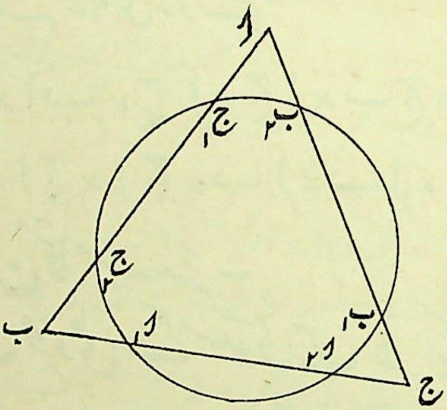
نوٹ ۔ ظل کے حقیقی ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ ن سے مخروطی کے مماس حقیقی نہ ہوں (نوٹ دفعہ ۸۷)۔ یعنی ن، مخروطی کے اندر واقع ہونا چاہئے ۔

۱۱۴ - کارنو کا مسئلہ -

اگر ایک مخروطی ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو ا$_1$، ا$_2$، ب$_1$، ب$_2$، ج$_1$، ج$_2$ پر قطع کرے تو

ا ب$_1$ × ا ب$_2$ × ج ا$_1$ × ج ا$_2$ × ب ج$_1$ × ب ج$_2$

= ا ج$_1$ × ا ج$_2$ × ب ا$_1$ × ب ا$_2$ × ج ب$_1$ × ج ب$_2$



مخروطی کی تظلیل ایک دائرہ میں کرو اور ظِل میں نقطوں کو متناظر چھوٹے حرفوں سے تعبیر کرو -

اب چونکہ

ا ب$_1$ × ا ب$_2$ = ا ج$_1$ × ا ج$_2$

ج ا$_1$ × ج ا$_2$ = ج ب$_1$ × ج ب$_2$

ب ج$_1$ × ب ج$_2$ = ب ا$_1$ × ب ا$_2$

∴ اب$_1$ × اب$_2$ × جا$_1$ × جا$_2$ × بج$_1$ × بج$_2$

= اج$_1$ × اج$_2$ × جب$_1$ × جب$_2$ × با$_1$ × با$_2$

∴ وہ مثلث جو خطوں ا$_1$ب$_2$، ب$_1$ج$_2$، ج$_1$ا$_2$ سے بنتا ہے مثلث اب ج کے ساتھ منظرہ میں ہے (دفعہ ۶۸) -

∴ وہ مثلث جو خطوں اب$_2$، ب$_1$ج$_2$، ج$_1$ا$_2$ سے بنتا ہے مثلث اب ج کے ساتھ منظرہ میں ہے - (117)

∴ دفعہ ۶۸ کی رُو سے

اب$_1$ × اب$_2$ × جا$_1$ × جا$_2$ × بج$_1$ × بج$_2$

= اج$_1$ × اج$_2$ × با$_1$ × با$_2$ × جب$_1$ × جب$_2$

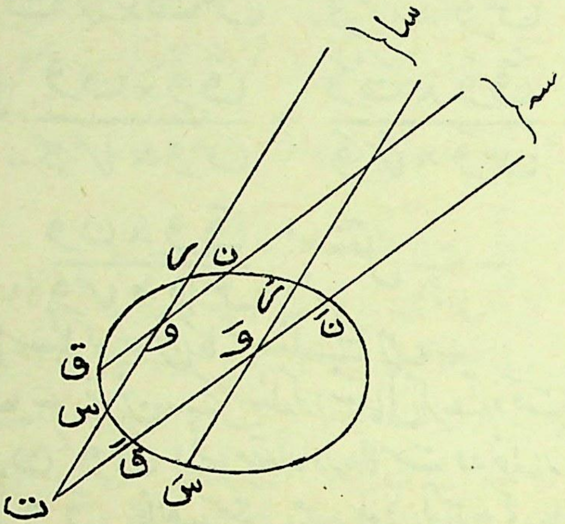
۱۱۵ - نیوٹن کا مسئلہ -

اگر ایک مخروطی کے مستوی میں و ایک متغیر نقطہ ہو اور ن ق اور ر س، و میں سے گذرنے والے وتر ہوں جو ثابت سمتوں میں کھینچے گئے ہوں تو

$$\frac{\text{و ن} \times \text{و ق}}{\text{و ر} \times \text{و س}}$$ مستقل ہوگا -

فرض کرو کہ وَ کوئی دوسرا نقطہ ہے - وَ میں سے وتر نَ قَ اور رَ سَ، وتروں ن ق اور ر س کے متوازی کھینچو

فرض کرو کہ ق ن اور قَ نَ لاتناہی پر نقطہ سہ پر ملتے ہیں اور س ر اور سَ رَ نقطہ سا پر۔



فرض کرو کہ ن قَ اور ر س، ت پر ملتے ہیں۔
اب مثلث سہ وت پر کارنو کا مسئلہ استعمال کرو تو

$$\frac{\text{سہ ن × سہ ق × ور × وس × ت نَ × ت قَ}}{\text{سہ نَ × سہ قَ × ت ر × ت س × ون × وق}} = \text{۱}$$

$$\text{لیکن}\quad \frac{\text{سہ ن}}{\text{سہ نَ}} = \text{۱} \quad\text{اور}\quad \frac{\text{سہ ق}}{\text{سہ قَ}} = \text{۱}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{ت نَ × ت قَ}}{\text{ت ر × ت س}} = \frac{\text{ون × وق}}{\text{ور × وس}}$$ (118)

پھر مثلث سات وَ پر کارنو کا مسئلہ استعمال کرو تو

$$\frac{\text{سار × ساس × ت نَ × ت قَ × وَرَ × وَسَ}}{\text{سارَ × ساسَ × وَنَ × وَقَ × ت ر × ت س}} = \text{۱}$$

$$\therefore \frac{\text{تنَ} \times \text{تقَ}}{\text{ترَ} \times \text{تسَ}} = \frac{\text{وَنَ} \times \text{وَقَ}}{\text{وَرَ} \times \text{وَسَ}}$$

اس لئے

$$\frac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ور} \times \text{وس}} = \frac{\text{وَنَ} \times \text{وَقَ}}{\text{وَرَ} \times \text{وَسَ}}$$

یعنی $\frac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ور} \times \text{وس}}$ مستقل ہے۔

اس مسئلہ کو نیوٹن کا مسئلہ کہتے ہیں۔

نوٹ ۔ نیوٹن کے مسئلہ کو استعمال کرتے وقت یہ یاد رکھنا چاہئے کہ خطوط ون ، وق وغیرہ مقدار اور علامت دونوں رکھتے ہیں۔ اگر ون اور وق مخالف سمتوں میں ہوں تو اُن کی علامتیں مختلف ہونگی اور اسی طرح ور اور وس کے لئے بھی۔

۱۱۶ ۔ نیوٹن کا مسئلہ بہت اہم ہے جیسا کہ ہم ابواب آئندہ میں دیکھینگے جہاں اس سے بہت استفادہ کیا جائیگا۔ ہم اس کے استعمال کی توضیح کے لئے چند مسئلے دیتے ہیں۔

مسئلہ ۔ اگر ایک مخروطی کے دو وتر ن نَ اور ق قَ و پر متقاطع ہوں تو نسبت ون × ونَ : وق × وقَ اُن ماسکی وتروں کے طولوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے جو ن نَ اور ق قَ کے متوازی ہیں۔

فرض کرو کہ ن نَ اور ق قَ کے متوازی ماسکی وتر ن س نَ اور ق س قَ ہیں۔

نیوٹن کے مسئلہ سے

$$\text{ون} \times \text{ونَ} : \text{وق} \times \text{وقَ}$$

= س ن × س نَ : س ق × س قَ

= ن نَ : ق قَ (دفعہ ۱۱۲ نتیجہ صریح)

خاص صورت میں جبکہ و مخروطی کا مرکز ہو حاصل ہوگا

ونَ = - ون اور وقَ = - وق

ون^{2} : وق^{2} = ن نَ : ق قَ

نوٹ - ہم قبل ازیں یہ واضح کر چکے ہیں کہ نیوٹن کا مسئلہ استعمال کرتے وقت خط کے مقطوعوں کی علامتیں ملحوظ رکھنی چاہئیں -

اگر ون × ونَ اور وق × وقَ مختلف العلامت ہوں تو س ن × س نَ اور س ق × س قَ بھی مختلف العلامت (119) ہوں گے - یہ صرف قطع زائد کی صورت میں واقع ہوتا ہے جبکہ چار نقطوں ن، نَ، ق، قَ میں سے ایک نقطہ اس شاخ کی مقابل شاخ پر واقع ہو جس پر دوسرے تین نقطے واقع ہیں - ایسی صورت میں ماسکی وتروں ن نَ، ق قَ میں سے ایک، مخالف شاخوں کے دو نقطوں کو ملائیگا اور دوسرا، ایک ہی شاخ کے دو نقطوں کو ملائیگا -

اگر ہم یہ قرارداد اختیار کریں کہ ماسکی وتر کے طول کو منفی علامت لگائی جائیگی اگر وہ مخالف شاخوں کے دو نقطوں کو ملائے اور مثبت علامت لگائی جائیگی اگر وہ ایک ہی شاخ کے دو نقطوں کو ملائے تو رشتہ

ون × ونَ : وق × وقَ = ن نَ : ق قَ

عددی اور جبری دونوں طرح صحیح ہے -

اسی طرح علامت کی مذکورۂ بالا قرارداد کے ساتھ یہ بھی درست ہے کہ اگر ماسکی وتروں ن نَ، ق قَ کے متوازی نیم قطر ج ن اور ج ق ہوں تو

ن نَ : ق قَ = ج ن^{2} : ج ق^{2}

اس رشتہ سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ماسکی وتر ایک ہی شاخ پر کے

دو نقطوں کو ملائے اور دوسرا ماسکی وتر مخالف شاخوں پر کے دو نقطوں کو ملائے تو اِن دو ماسکی وتروں کے متوازی دو قطروں میں سے صرف ایک قطر منحنی سے حقیقی نقطوں پر ملیگا کیونکہ اب نسبت ج ن^{۲} : ج ف^{۲} کی قیمت منفی ہے۔

۱۱۷ — مسئلہ — اگر ون اور وق، ایک مخروطی کے دو مماس ہوں تو ون^{۲} : وق^{۲} اُس نسبت کے مساوی ہے جو ون اور وق کے متوازی ماسکی وتروں کے درمیان ہے

فرض کرو کہ ماسکی وتر ن س نَ اور ق س قَ ہیں۔ اب ون کے متعلق یہ سمجھنے سے کہ وہ منحنی سے دو منطبق نقطوں ن پر ملتا ہے (اور اسی طرح وق کے متعلق سمجھنے سے) نیوٹن کے مسئلہ کی رو سے حاصل ہوتا ہے:

ون × ون = وق × وق

= س ن × س نَ : س ق × س قَ

ش ون^{۲} : وق^{۲} = ن نَ : ق قَ

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ماسکی وتر ایک ہی علامت رکھتے ہیں۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ ایک نقطہ سے کسی مرکز دار مخروطی کے مماسوں کی نسبت اُس نسبت کے مساوی ہوگی جو مماسوں کے متوازی قطروں کے درمیان ہے۔

۱۱۸ — مسئلہ — اگر ایک دائرہ ایک مخروطی کو چار نقطوں پر قطع کرے تو وہ وتر جو ان کے نقاط تقاطع کو دو دو کرکے ملانے سے حاصل ہوں محور کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی اور دائرہ چار نقطوں ن، ق، نَ، قَ پر متقاطع ہوتے ہیں ۔

فرض کرو کہ ن نَ اور ق قَ، و پر متقاطع ہوتے ہیں ۔

ن نَ اور ق قَ کے متوازی ماسکی وتر ن س نَ، ق س قَ

(120) کھینچو تو نیوٹن کے مسئلہ سے

و ن × و نَ : و ق × و قَ

= س ن × س نَ : س ق × س قَ

= ن نَ : ق قَ

لیکن دائرہ کے لئے

و ن × و نَ = و ق × و قَ

∴ ن نَ = ق قَ اور س ن × س نَ = س ق × س قَ

اس طرح یہ متوازی ماسکی وتر ایک ہی علامت رکھتے ہیں، اِن کے طول مساوی ہیں اور وہ مستطیل جو ان کے مقطوعوں سے حاصل ہوتے ہیں مساوی ہیں ۔

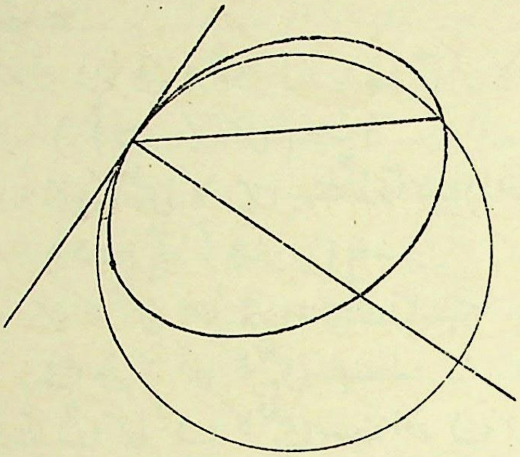
اس لئے یہ وتر متشاکلاً واقع ہونے چاہئیں اور اس لئے محور کے ساتھ مساوی زاوئے بنانے چاہئیں ۔ پس ن نَ اور ق قَ جو اِن ماسکی وتروں کے متوازی ہیں محور کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں ۔

نتیجہ صریح ۔ اگر ایک دائرہ ایک مخروطی کو ایک نقطہ پر مس کرے اور دوسرے دو نقطوں پر قطع کرے تو نقطہ تماس پر کا مماس اور نقاط تقاطع کو ملانے والا وتر محور کے ساتھ مساوی زاوے بنائینگے ۔

دائرہ انحناء

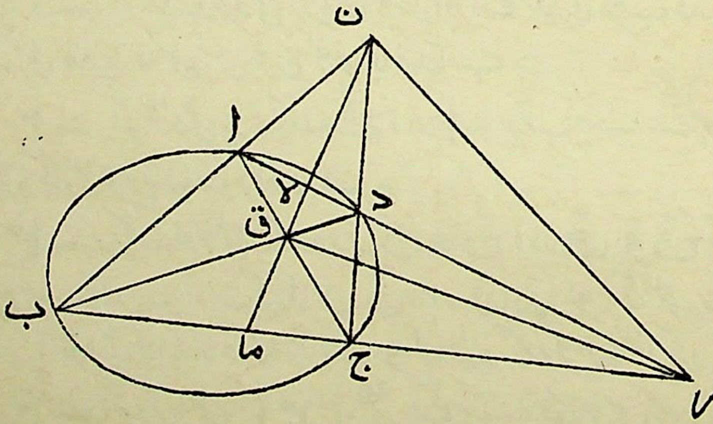
۱۱۹۔ اُن دائروں کی تعداد جو ایک مخروطی کو ایک دئے ہوئے نقطے ن پر مس کریں لامتناہی ہے اور ایسے دائروں کے مرکز اُس خط پر ہوتے ہیں جو دئے ہوئے نقطہ پر مخروطی کا عماد ہے۔ دائرے بالعموم مخروطی کو دوسرے دو نقطوں پر قطع کرینگے لیکن اُس خاص صورت میں جبکہ اِن دو دوسرے نقطوں میں سے ایک، نقطہ تماس ن پر منطبق ہو دائرہ کو نقطہ ن پر کا دائرہ انحناء کہتے ہیں۔ اس دائرہ کو اُس دائرہ کی انتہائی صورت سمجھا جا سکتا ہے جو مخروطی کے نقطہ ن میں سے اور اس سے متصل دو نقطوں میں سے گذرے، گویا اس صورت میں مخروطی اور دائرہ دو متصلہ مماس مشترک رکھتے ہیں۔ ایسی صورت میں اِن دونوں کے انحناء کی شرح اُس نقطہ پر ایک ہی ہوتی ہے۔ انحناء کا مضمون خاص طور پر **تفرقی احصاء** سے تعلق رکھتا ہے لیکن یہاں مخروطی کے دوائرِ انحناء کی اہم خاصیتیں بیان کرنا مناسب معلوم ہوتا ہے۔ چنانچہ قطع مکافی، ناقص اور زائد کے ابواب کے ختم پر ہم ایک مسئلہ بیان کرینگے جو ان منحنیوں کے دوائر انحناء سے متعلق ہوگا۔ دفعہ ۱۱۸ کی رو سے یہ ظاہر ہے کہ اگر ایک مخروطی کے نقطہ ن پر کا دائرہ انحناء مخروطی کو مکرر نقطہ ق پر قطع کرے تو ن ق اور نقطہ ن پر کا مماس محور کے ساتھ مساوی زاوے بنائینگے کیونکہ نقطہ ن پر کا مماس اور وتر ن ق، دائرہ اور مخروطی کے مشترک وتر ہیں۔

(121) حسب ذیل شکل ایک مخروطی کے ایک نقطہ پر کے دائرہ انحناء کی تمثیل ہے۔



خود قطبی مثلث۔

۱۱۹ا — مسئلہ — اگر ایک مخروطی ایک چار زاوئی کے چار نقطوں میں سے گزرے تو وتری یا موسیقی مثلث، مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہوتا ہے یعنی ہر راس متقابلہ ضلع کا قطب ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ چار زاوئی ا ب ج د ہے اور ن ق ر وتری یا موسیقی مثلث ۔

فرض کرو کہ ن ق، اد اور ب ج کو لا اور ما پر قطع کرتا ہے (122)

اب (اد، لا ر) = -۱

∴ ر کا قطبی لا میں سے گذرتا ہے (دفعہ ۹۲ (۵))

اور (ب ج، ما ر) = -۱

∴ ر کا قطبی ما میں سے گذرتا ہے

∴ ن ق، ر کا قطبی ہے ۔

اسی طرح ق ر، ن کا قطبی ہے اور ن ر، ق کا ۔

پس مسئلہ ثابت ہو چکا ۔

اس مسئلہ کو اس طرح بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ وتری نقطے جب دو دو کر کے لئے جاتے ہیں تو وہ مخروطی کے مزدوج نقطے ہوتے ہیں

مثلث ن ق ر کو مخروطی کے لحاظ سے خود مزدوج بھی کہتے ہیں ۔

مثالیں

۱ ـ اگر ایک مخروطی، ایک ماسکہ اور اسکا نظیری مرتب دے جائیں تو بتاؤ کہ کسی نقطہ پر مماس کس طرح کھینچا جا سکتا ہے ۔

۲ ـ اگر مخروطی پر کے دو نقطے اور ایک مرتب دے گئے ہوں تو بتاؤ کہ متناظر ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے ۔

۳ ـ ایک مخروطی کے دو وتر ن و نَ اور ق و قَ نقطہ و پر متقاطع ہوتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ ن ق اور نَ قَ، و کے قطبی پر ملتے ہیں ۔

[مخروطی کو ایک دائرہ میں اور و کو دائرہ کے مرکز میں منظل کرو]

۴ ـ اگر وتر خاص خ س خَ کے سرے پر کا مماس قریب تر راس ا پہ کے مماس سے نقطہ ت پر ملے تو ت ا = ا س ۔

۵ — اگر ایک مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ایک مرتب سے ف پر ملے اور متناظر ماسکہ میں سے گذرنیوالے وترخاص سے د پر ملے تو س د : س ف = خروج المرکز۔

۶ — اگر ایک مخروطی کے نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملے اور گ خ، ماسکی نصف قطر س ن پر عمود ہو تو ن خ = نصف وترخاص

۷ — اگر ایک مخروطی پر ق کوئی نقطہ ہو اور ن س نَ ایک ماسکی وتر ہو اور اگر ن ق اور نَ قَ اُس مرتب سے جو ماسکہ س کے متناظر ہے ف اور فَ پر ملیں تو ف س فَ ایک قائمہ زاویہ ہوگا۔

۸ — اگر ایک مخروطی ایک مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج کے مقابل کے اضلاع سے علی الترتیب د، ع، ف پر ملے تو ا د، ب ع، ج ف ہم نقطہ ہوں گے۔ [دفعہ ۱۱۴ استعمال کرو] (123)

۹ — نیوٹن کے مسئلہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ اگر ایک مکافی پر کے ایک نقطہ ن کا معین ن ل ہو اور مکافی کا راس ا ہو تو ن $ل^{۲}$: ا ل منحنی کے نقطہ ن کے محل پر منحصر نہیں ہے۔

۱۰ — دو ثابت نقطوں د اور ع میں سے مخروطیاں کھینچے گئے ہیں اور وہ ایسے ہیں کہ د ع کے محاذی ان میں سے ایک کے ماسکہ پر ایک مستقل زاویہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو اس ماسکہ کو د ع کے قطب سے ملاتا ہے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۱ — ایک مخروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی اسکے ایک مرتب سے اُس قطر پر ملتا ہے جو اس نقطہ میں سے اور متناظر ماسکہ میں سے گذرنیوالے ماسکی وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

۱۲ — ثابت کرو کہ مخروطی کے ایک ماسکہ اور نظیری مرتب کے اُس نقطہ کو ملانے والا خط جس پر متوازی وتروں کے ایک نظام کی تنصیف کرنیوالا قطر اس مرتب سے ملتا ہے وتروں پر عمود ہوتا ہے۔ [دفعات ۹۵ اور ۱۰۶ استعمال کرو]

۱۳ — ایک مخروطی پر دو نقطے ن اور ق ہیں اور وہ قطر جو علی الترتیب ن اور ق پر کے مماسوں کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتے ہیں مرتب سے م اور ل پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ م ل کے محاذی متناظر ماسکہ پر جو زاویہ بنتا ہے وہ اُس زاویہ کے مساوی ہے جو ن اور ق پر کے مماسوں کے درمیان ہے۔

۱۴ — ایک متغیر مخروطی کا ایک ماسکہ اور متناظر مرتب دئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ایک دئے ہوئے نقطہ کا قطبی ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۵ — ایک متغیر مخروطی کا ایک ماسکہ اور دو نقطے دئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ متناظر مرتب دو ثابت نقطوں میں سے کسی ایک میں سے گذرنا چاہئے۔

۱۶ — اگر دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہو تو اِن دو مخروطیوں کا ایک مشترک وتر متناظر مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گذریگا۔

۱۷ — اگر ایک مخروطی کے نقطہ ن پر کے مماس پر کوئی نقطہ ت ہو اور مخروطی کا ایک ماسکہ س ہو اور اگر س ن پر عمود ت م اور س کے متناظر مرتب پر عمود ت ل ہو تو ثابت کرو کہ

س م : ت ل = ز (آدم کا مسئلہ)

۱۸ — ایک مخروطی کا ایک ماسکہ اور اس ماسکہ میں سے گذرنیوالا ایک وتر دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ متناظر وتر خاص کے سروں کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(124) ۱۹ — اگر ایک مخروطی کے دو مماس ت ن اور ت ق ہوں تو ثابت کرو کہ ن ق کے متوازی مماس کا وہ حصہ جو ت ن اور ت ق کے درمیان منقطع ہوتا ہے نقطہ تماس پر تنصیف ہوتا ہے۔

۲۰ — ایک مخروطی کا ایک قطر منحنی سے نقطہ ن پر ملتا ہے اور اُس وتر ق ر کی تنصیف کرتا ہے جو ق پر عماد ہے۔ ثابت کرو کہ ق میں سے گذرنے والا قطر ن میں سے گذرنے والے اُس وتر کی تنصیف کرتا ہے جو ن پر عماد ہے۔

۲۱ — ایک مخروطی کا ایک وتر ن ق ہے جو محور کو ک پر قطع کرتا ہے ن ق کا قطب ت ہے۔ وہ قطر جو ن ق کی تنصیف کرتا ہے ایک مرتب سے ے پر ملتا ہے اور س متناظر ماسکہ ہے۔ ثابت کرو کہ ت س ے ک کے متوازی ہے۔

۲۲ — ایک مخروطی کے وتر ا اَ، ب بَ، ج جَ ایک نقطہ و پر ملتے ہیں اور مخروطی پر کوئی نقطہ ن ہے۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم ب ج اور ن اَ، جَ ا اور ن بَ، اب اور ن جَ کے نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو و میں سے گذرتا ہے۔

[نقطہ و اور اب، ن جَ کے نقطہ تقاطع کو ملانے والے خط کو لامتناہی پر اور مخروطی کو ایک دائرہ میں مظلل کرو]

۲۳ — ایک مخروطی پر چار نقطے ا، ب، ج، د ہیں اب اور ج د، ع پر اور ا ج اور ب د، ف پر ملتے ہیں۔ ا اور د پر کے مماس گ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط ع، ف، گ ہم خط ہیں۔

[ا د اور ب ج کو متوازی خطوں میں اور مخروطی کو ایک دائرہ میں مظلل کرو]

۲۴ — اگر ایک مخروطی ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اندر بنایا جائے تو نقاط تماس میں سے دو نقطوں کو ملانے والا خط اُس مثلث کے ایک راس میں سے گذریگا جو ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں سے بنتا ہے۔

۲۵ — پیاسکل (Pascal) کا یہ مسئلہ ثابت کرو کہ اگر ایک مخروطی میں ایک مسدس بنایا جائے تو متقابلہ ضلعوں کے زوج تین ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو ہم خط ہیں۔

[مخروطی کی تظلیل ایک دائرہ میں اس طرح کرو کہ وہ خط جو متقابلہ ضلعوں کے دو زوجوں کے نقاط تقاطع کو ملائے لاتناہی پر مظلل ہو]

۲۶ — ایک مخروطی کے مستوی میں ا ایک ثابت نقطہ ہے اور ا کے قطبی پر ن کوئی نقطہ ہے۔ ن سے مخروطی کے مماس ایک دے ہوئے

خط کو ق اور م پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا م، ن ق اور ا ق، ن م ایک ثابت خط پر متقاطع ہوتے ہیں۔

[مخروطی کو ایک دائرہ میں اس طرح منظلل کرو کہ اسکا مرکز ا ہو]

۲۷ — مخروطیوں کا ایک نظام خطوط ا ب اور ا ج کو ب اور ج پر مس کرتا ہے۔ د ایک ثابت نقطہ ہے اور ب د، ج د، اس نظام کے ایک مخروطی سے ن اور ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق، ب ج سے ایک ثابت نقطہ پر ملتا ہے۔

۲۸ — اگر ایک مخروطی نقطوں ا، ب، ج، د میں سے گذرے تو ا ج اور ب د، ا ب اور ج د، ب اور ج پر کے مماس، ا اور د پر کے مماس جن نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں وہ ہم خط ہوں گے۔

۲۹ — ایک مخروطی پر کے ایک ثابت نقطہ ا میں سے دو ثابت خطوط مستقیم ا ع اور ا عَ کھینچے گئے ہیں، س اور سَ دو ثابت نقطے ہیں اور ن مخروطی پر ایک متغیر نقطہ ہے۔ ن س اور ن سَ، ا ع اور ا عَ سے علی الترتیب ق اور قَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق قَ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۳۰ — ایک مخروطی ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کو ا$_1$ ا$_2$، ب$_1$ ب$_2$، ج$_1$ ج$_2$ پر قطع کرتا ہے اور ا ا$_1$، ب ب$_1$، ج ج$_1$ ہم نقطہ ہیں۔ ثابت کرو کہ ا ا$_2$، ب ب$_2$، ج ج$_2$ بھی ہم نقطہ ہوں گے۔

۳۱ — جب ایک مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے خود مزدوج ہوتا ہے تو اس مثلث کے دو اور صرف دو ضلع منحنی کو حقیقی نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔

۳۲ — ثابت کرو کہ ایک قطع زائد کے دو مزدوج قطروں میں سے ایک اور صرف ایک، منحنی کو حقیقی نقطوں پر قطع کر سکتا ہے۔

[دو مزدوج قطر اور لاتناہی پر کا خط، خود مزدوج مثلث بناتے ہیں]

۳۳ — اگر چار نقطے س، ا، ب، ج دئے گئے ہوں تو ثابت کرو کہ بالعموم چار مخروطی ا، ب، ج میں سے کھینچے جا سکتے ہیں جنکا ماسکہ س ہو اور یہ کہ ان میں سے تین مخروطی ایسے قطع زائد ہونگے کہ ا، ب، ج ایک ہی شاخ پر واقع نہیں ہوں گے لیکن بقیہ مخروطی ایسا قطع ناقص، قطع زائد یا قطع مکافی ہو سکتا ہے کہ ا، ب، ج ایک ہی شاخ پر واقع ہونگے۔

۳۴ — ثابت کرو کہ ایک دائرہ کی تظلیل ایک قطع مکافی میں اس طرح کی جا سکتی ہے کہ دائرہ کے اندر کا کوئی دیا ہوا نقطہ ماسکہ میں مظلل ہو۔

۳۵ — ثابت کرو کہ ایک دائرہ کی تظلیل ایک قطع ناقص میں اس طرح کی جا سکتی ہے کہ دائرہ کے اندر کے دو دئے ہوئے نقطے قطع ناقص کے مرکز اور ایک ماسکہ میں مظلل ہوں۔

۳۶ — ثابت کرو کہ ایک دائرہ کی تظلیل ایک قطع زائد میں اس طرح کیجا سکتی ہے کہ دائرہ کے اندر کا ایک دیا ہوا نقطہ ن اور اس کے باہر کا دوسرا دیا ہوا نقطہ ق علی الترتیب قطع زائد کے ایک ماسکہ اور مرکز میں مظلل ہوں۔

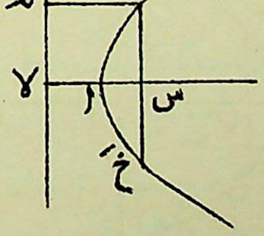
گیارہواں باب

(126)

قطع مکافی

۱۲۰ — قطع مکافی کی شکل دفعات ۹۶ اور ۹۷ میں دکھائی جا چکی ہے۔ اس باب میں ہم اس منحنی کی مخصوص خاصیتیں بیان کرینگے۔ پورے باب میں ا راس کے لئے، س ماسکہ کے لئے، لا مرتب اور محور کے نقطہ تقاطع کے لئے اور سا لاتناہی پر محور پر کے اس نقطہ کے لئے استعمال ہوگا جس پر جیساکہ ہم دیکھ چکے ہیں قطع مکافی لاتناہی پر کے خط کو مس کرتا ہے۔

مسئلہ۔ وتر خاص = ۴ ا س



فرض کرو کہ خ س خَ وتر خاص ہے۔

خ م، مرتب پر عمود کھینچو۔ اب خ خَ = ۲ خ س = ۲ خ م
= ۲ س لا = ۴ ا س۔

۱۲۱ — اگر نقطہ ن کا معین ت ل ہو تو

ن ل^{۲} = ۴ ا س × ا ل

فرض کرو کہ ن ل قطع مکافی کو مکرر نَ پر ملتا ہے اور فرض کرو کہ خ س خَ وتر خاص ہے۔

اب نیوٹن کے مسئلہ کی رو سے (دفعہ ۱۱۵)

ل ن × ل نَ : س خ × س خَ

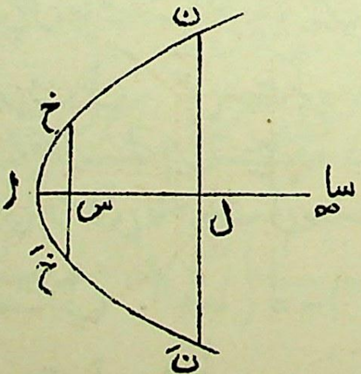
= ل ا × ل سا : س ا × س سا

= ل ا : س ا کیونکہ سا لاتناہی پر ہے

∴ ن ل^{۲} : س خ^{۲} = ا ل : ا س (127)

∴ ن ل^{۲} : ۴ ا س^{۲} = ا ل : ا س

∴ ن ل^{۲} = ۴ ا س × ا ل



آئندہ چلکر یہ معلوم ہوگا کہ یہ مسئلہ ایک عام تر مسئلہ کی صرف ایک مخصوص صورت ہے۔

۱۲۲۔ مسئلہ ماسبق سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قطع مکانی ایک مستوی میں ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے کہ ایک خط ل سے اس کے فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے ایک عمود وار خط لَ سے اِسکا فاصلہ۔ خط ل محور ہے، لَ راس پر کا مماس اور تغیر کا مستقل وتر خاص کا طول ہے۔

قطع مکانی کی تعیین کے لئے ہمیں یہ جاننا چاہئے کہ نقطہ، خط لَ کی کس جانب واقع ہے۔ اگر وہ خط کے دونوں طرف واقع ہو سکتا ہے تو طریق دو قطعات مکانی ہیں اور ان میں ہر ایک دوسرے سے اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ اسکو راس پر کے مماس کے گرد دو قائمہ زاویوں میں سے گھمایا جائے۔

۱۲۳۔ مماس اور عماد۔

مسئلہ۔ اگر منحنی کے نقطہ ن پر کا مماس محور سے نقطہ ت پہ اور عماد محور سے نقطہ گ پر ملے اور ن کا معین ن ل ہو تو

(۱) ت ا = ا ل

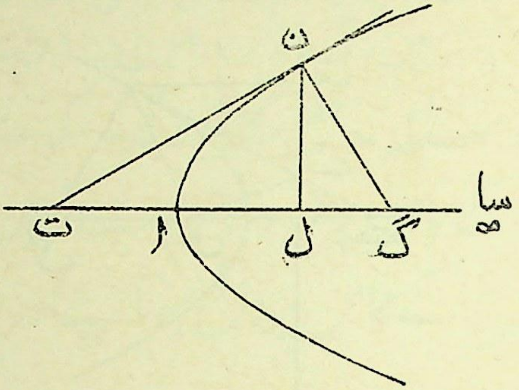
(۲) ل گ = ۲ ا س

ان میں سے پہلی خاصیت دفعہ ۹۷ میں ثابت کیجا چکی ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر ن ل، منحنی سے کر رہ نَ پر ملے تو ن اور نَ پر کے مماس محور کے خط پر ملتے ہیں یعنے وہ ت پر متقاطع ہوتے ہیں (128)
اب قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت کی رو سے

(ت ل، ا س ا) = -۱

∴ ت ا = ا ل



نیز چونکہ ت ن گ قائمہ زاویہ ہے اس لئے

ن $ل^{۲}$ = ت ل × ل گ = ۲ ا ل × ل گ

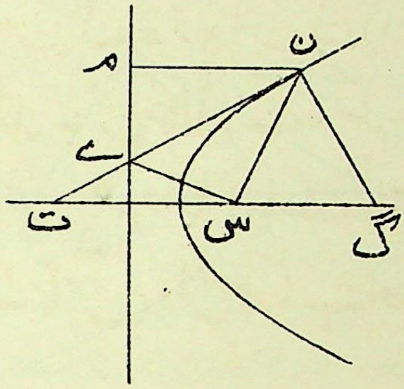
لیکن ن $ل^{۲}$ = ۴ اس × ا ل (دفعہ ۱۲۱)

∴ ل گ = ۲ اس

تعریف ۔ ل گ کو نقطہ ن کا **زیر عماد** کہتے ہیں۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ قطع مکافی میں زیر عماد مستقل ہوتا ہے۔

۱۲۴ ــ مسئلہ ۔ قطع مکافی کے کسی نقطہ پر کا مماس محور اور اس نقطہ کے ماسکی فاصلہ کے ساتھ مساوی زاوئے بناتا ہے ۔



فرض کرو کہ نقطہ ن پر کا مماس مرتب سے ے پر اور محور سے ت پر ملتا ہے۔ ن م، مرتب پر عمود کھینچو۔

اب چونکہ س ن = ن م اور ن ے مثلثات س ن ے اور م ن ے میں مشترک ہے اور ان مثلثوں میں م اور س پر کے زاویے قائمہ ہیں اس لئے (129)

∆ س ن ے ≡ ∆ م ن ے

اور ∠ س ن ت = ∠ ت ن م = ∠ س ت ن

نتیجہ صریح۔ اگر ن پر کا عماد محور سے گ پر ملے تو

س گ = س ن = س ت

س ت اور س ن کا مساوی ہونا زاویوں س ن ت اور س ت ن کے مساوی ہونے سے ماخوذ ہوتا ہے۔
نیز چونکہ ان زاویوں کے تکملے مساوی ہونے چاہئیں اس لئے

∠ س ن گ = ∠ س گ ن

∴ س گ = س ن

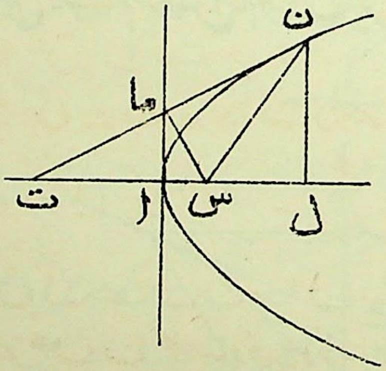
یہ یاد رہے کہ قطع مکافی میں س گ اور س ن کا مساوی ہونا اس واقعہ سے اخذ ہوتا ہے کہ کسی مخروطی کے لئے

س گ = ز × س ن (دفعہ ۱۱۱)۔

۱۲۵۔ مسئلہ۔ قطع مکافی کے ماسکہ سے اس کے کسی نقطہ ن کے مماس پر عمود نکالا جائے، تو اس عمود کا پائین ما′ راس پر کے مماس پر واقع ہوتا ہے اور س ما′^{2} = س ا × س ن۔

اس مسئلہ کا پہلا جزو دفعہ ۹۷ میں ضمنی طور پر ثابت کیا جا چکا ہے اسے ہم حسب ذیل طریقہ پر بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ن پر کا مماس محور سے ت پر ملتا ہے۔ چونکہ س ت = س ن اس لئے س ما′ ت ن کی تنصیف کریگا۔



لیکن اگر ن ل′ ن کا معیّن ہو تو ت ا = ا ل

∴ اما′ ل ن کے متوازی ہے یعنی اما′ راس پر مماس ہے۔

(130) نیز چونکہ س ما ت ایک قائمہ زاویہ ہے اور ما ا' س ت پر عمود ہے اس لئے س ما^2 = س ا × س ت = س ا × س ن

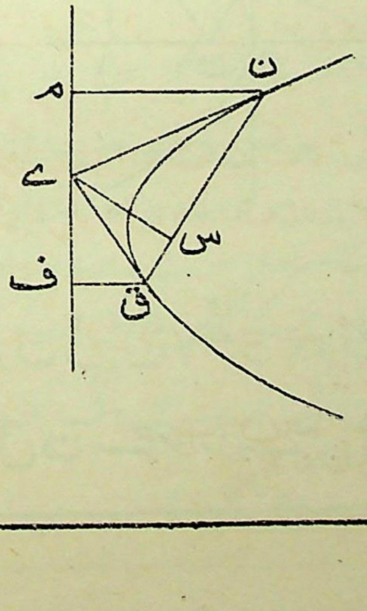
نتیجۂ صریح (۱)۔ ∠ س ن ما = ∠ س ما ا

نتیجہ صریح (۲)۔ اگر ایک متغیر خط پر ایک ثابت نقطے سے عمود نکالا جائے اور اس عمود کے پائیں کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو متغیر خط ایک قطع مکافی کو مس کریگا جسکا ماسکہ ثابت نقطہ پر ہوگا۔

تعریف۔ جب کوئی خط ایک مستوی میں اس طور پر حرکت کرے کہ وہ ہمیشہ کسی خاص منحنی کو مس کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ یہ منحنی خط کا لفاف ہے۔

مماسوں کا زوج

۱۲۶۔ مسئلہ۔ قطع مکافی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے مماس مرتب پر علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔



یہ امر کہ وہ مرتب پر متقاطع ہوتے ہیں ہم پہلے سے جانتے ہیں کیونکہ ماسکہ اور مرتب قطب اور قطبی ہیں۔

فرض کرو کہ ن س ق ایک ماسکی وتر ہے اور فرض کرو کہ اس کے سروں پر کے مماس مرتب پر نقطہ ے پر ملتے ہیں۔ مرتب پر عمود ن م اور ق ف کھینچو۔

اب جیسا کہ ہم دفعہ ۱۲۴ میں دیکھ چکے ہیں

△ س ن ے ≡ △ م ن ے

∴ ∠ س ے ن = ∠ م ے ن

اسی طرح ∠ س ے ق = ∠ ف ے ق

اس لئے ∠ ق ے ن = $\frac{1}{2}$ × دو قائمہ زاوئے

= ایک قائمہ زاویہ

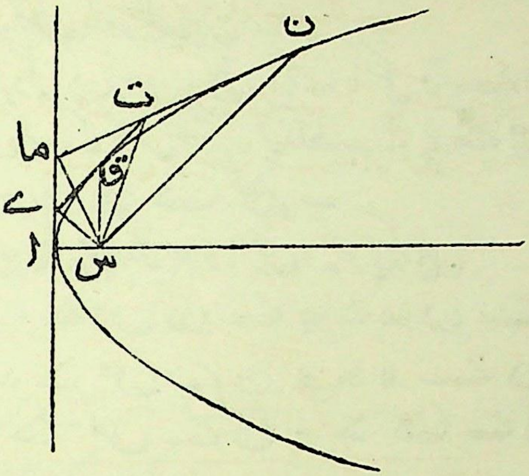
۱۲۷ - مسئلہ - اگر ایک قطع مکافی کے دو مماس ت ن اور ت ق ہوں تو مثلثات س ن ت اور س ت ق متشابہ ہوں گے۔ (131)

ہم جانتے ہیں کہ زاوئے ن س ت اور ت س ق مساوی ہیں (دفعہ ۱۰۹)۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے مماس راس پر کے مماس سے ما اور ے پر ملتے ہیں تو س ما ت اور س ے ت قائمہ زاوئے ہیں (دفعہ ۱۲۵)۔

اب ∠ س ن ما = ∠ س ما ا (دفعہ ۱۲۵)

= ∠ س ت ے کیونکہ س ے ما ت دائری ہے



پس ∠ س ن ت = ∠ س ت ق

∴ بقیہ زاویہ س ت ن = ∠ س ق ت اور مثلثات س ن ت اور س ت ق متشابہ ہیں۔

نتیجۂ صریح (۱)۔ س ت^{۲} = س ن × س ق

کیونکہ س ن : س ت = س ت : س ق

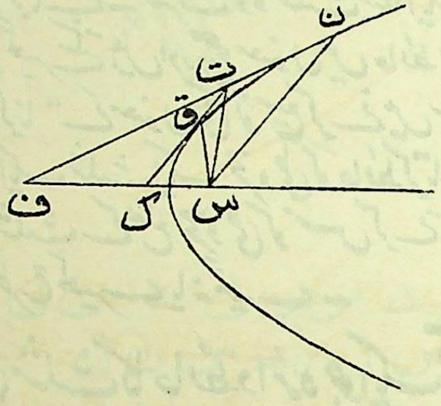
نتیجۂ صریح (۲)۔ ت ن^{۲} : ت ق^{۲} = س ن : س ق

کیونکہ ت ن^{۲} : ت ق^{۲} = △ س ن ت : △ س ت ق
= س ن × س ت : س ت × س ق
اسوجہ سے کہ ∠ ن س ت = ∠ ت س ق
= س ن : س ق

۱۲۸۔ مسئلہ۔ ایک قطع مکافی کے دو مماسوں کے درمیان زاویہ خارجہ اُس زاویہ کے نصف کے مساوی ہوتا ہے جو

ان کا وتر تماس ماسکہ پر بناتا ہے۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے مماس نقطہ ت پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ وہ محور سے علی الترتیب ف اور ک پر ملتے ہیں۔



اب ∠ ف ت ک = ∠ س ک ق - ∠ س ف ن

= ∠ س ق ک - ∠ س ن ت

= ۲ قائمہ زاوے - ∠ س ق ت

- ∠ س ن ت

= ۲ قائمہ زاوئے - ∠ س ت ن

- ∠ س ن ت

= ∠ ت س ن

= ½ ∠ ن س ق

۱۲۹ - قطع مکافی جو ایک مثلث کے اضلاع کو مس کرے

جب ایک مثلث کے اضلاع ایک قطع مکافی کے مماس ہوں تو

ہم کہتے ہیں کہ مثلث قطع مکافی کو حائط کرتا ہے۔ لیکن یہ صاف طور پر ذہن نشین رہے کہ مثلث قطع مکافی کو گھیر نہیں لیتا کیونکہ کوئی محدود مثلث کسی قطع مکافی کو جو وسعت میں لاانتہاہی ہوتا ہے گھیر نہیں سکتا۔ جب کوئی مثلث ایک قطع مکافی کو حائط کرتا ہے تو فی الحقیقت قطع مکافی مثلث کا خارجی قطع مکافی ہوتا ہے یعنے وہ مثلث کے ایک ضلع کو اور دیگر دو محدودہ ضلعوں کو مس کرتا ہے۔ صرف وہ مثلث جنکا ایک ضلع لاانتہاہی پر کا خط ہو قطع مکافی کو گھیر سکتے ہیں اور صحیح معنوں میں حائط مثلث کہے جا سکتے ہیں لیکن لفظ "حائط کرنا" کے معنوں کی توسیع کرنے میں سہولت ہے چنانچہ جب ہم یہ کہیں کہ ایک مثلث ایک مخروطی کو حائط کرتا ہے تو اس سے یہ مطلب ہوگا کہ مثلث کے ضلع مخروطی کو مس کرتے ہیں خواہ مثلث مخروطی کو پوری طرح گھیرے یا نہ گھیرے۔

۱۳۰۔ اُس مثلث کا حائط دائرہ جو ایک قطع مکافی کے تین مماسوں سے بنتا ہے ماسکہ میں سے گذرتا ہے۔

حائط کرنے کا وہ مطلب لینے سے جو دفعہ ۱۲۹ میں سمجھایا جا چکا ہے ہم اس مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر بھی بیان کر سکتے ہیں۔ (133)

اگر ایک مثلث ایک قطع مکافی کو حائط کرے تو اسکا حائط دائرہ ماسکہ میں سے گذریگا۔

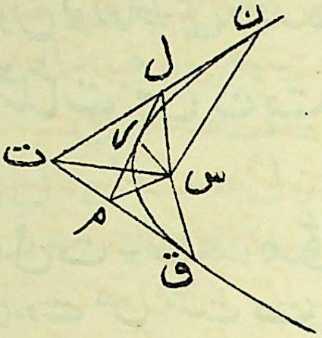
یا اس واقعہ سے ظاہر ہے کہ ماسکہ سے مثلث کے تین ضلعوں پر عمودوں کے پائیں ہم خط ہوتے ہیں کیونکہ وہ راس ا پر کے مماس پر واقع ہیں۔

∴ س، مثلث کے حائط دائرہ پر واقع ہے۔

یا ہم اس مسئلہ کو دوسری طرح ثابت کر سکتے ہیں:۔

فرض کرو کہ ن، ق، ر پر کے مماس مثلث ت ل م

بناتے ہیں (دیکھو شکل)۔



اب چونکہ △ س ن ل، △ س ل ر کے مشابہ ہے
اس لئے ∠ س ل ر = س ن ل
اور چونکہ △ س ن ت، △ س ت ق کے مشابہ
ہے اس لئے ∠ س ت ق = ∠ س ن ت۔
∴ ∠ س ل م = ∠ س ت م
یعنے س ل ت م دائری ہے یا س اُس دائرہ پر واقع ہے
جو ت، ل، م میں سے گذرتا ہے۔

نتیجہ صریح ۔ ایک ایسے مثلث کا مرکز عمودی جو ایک قطع مکافی کو حائط کرے مرتب پر واقع ہوتا ہے۔

اگر ت ل م مثلث ہو تو وہ خط جو س کو مرکز عمودی سے ملاتا ہے راس پر کے مماس سے تنصیف ہوتا ہے جو س کا خط پائین ہے (دفعہ ۸)۔

∴ مرکز عمودی مرتب پر واقع ہونا چاہئے۔

۱۳۱۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع مکافی کے نقاط ن اور ق

پر کے مماس نقطہ ت پر ملیں اور نقطہ ر پر کا ایک تیسرا مماس ان مماسوں کو نقاط ل اور م پر قطع کرے تو مثلث س ل م، مثلثات س ن ت اور س ت ق کے مشابہ ہوگا اور

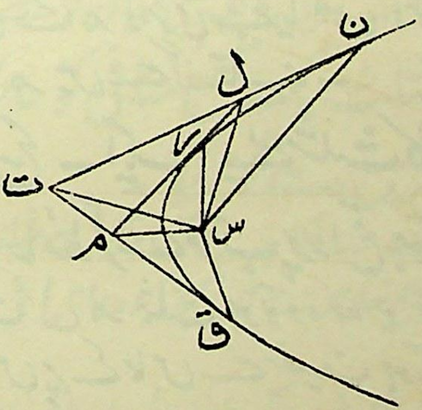
ن ل : ل ت = ت م : م ق = ل ر : ر م

گذشتہ مسئلہ کی رو سے س، مثلث ت ل م کے حائط دائرہ پر واقع ہے۔

∴ ∠ س م ل = ∠ س ت ل

اور ∠ س ل م = ∠ س ن ت، متشابہ مثلثوں س ن ل س ل ر سے۔

∴ △ س ل م، △ س ن ت کے مشابہ ہے اور اسلئے △ س ت ق کے بھی۔



نیز △ س ر ل، △ س ت م کے مشابہ ہے کیونکہ ∠ س ل م

= ∠ س ت م اور ∠ س ر ل = ∠ س ل ن

= ۱۸۰° - ∠ س ل ت = ∠ س م ت

∴ ل ر : ت م = س ر : س م

= م ر : م ق (متشابہ △ات س ر م، س م ق سے)

∴ ل ر : ر م = ت م : م ق

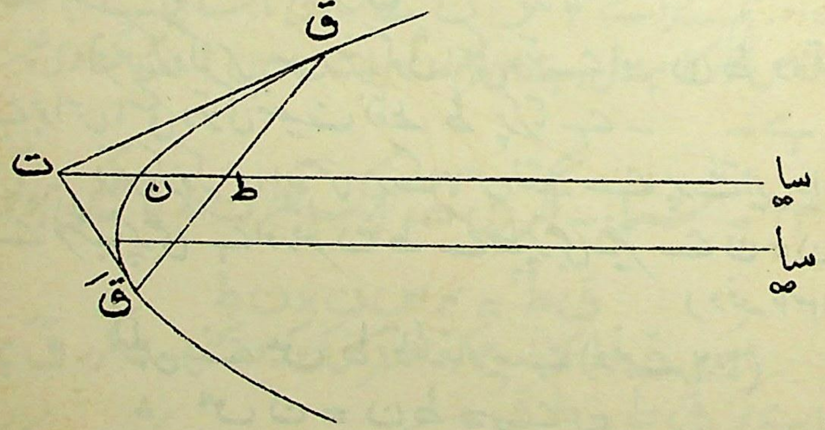
اسی طرح م ر : ر ل = ت ل : ل ن

اس لئے ن ل : ل ت = ت م : م ق = ل ر : ر م

۱۳۲ - قطر -

ہم دفعہ ۱۰۲ میں یہ سمجھا چکے ہیں کہ قطع مکافی کے قطروں سے کیا مراد ہے۔ محور کے متوازی ہر خط ایک قطر ہے اور ہر قطر متوازی وتروں کے ایک نظام کی تنصیف کرتا ہے۔ یہ بھی یاد رکھنا چاہئے کہ متوازی وتروں میں سے ہر ایک کے سروں پر کے مماس اس قطر پر متقاطع ہوتے ہیں جو اِن وتروں کی تنصیف کرتا ہے (دفعہ ۹۵)

(135)



مسئلہ - اگر ت ق اور ت ق' ایک مکافی کے مماس

ہوں اور ت ط وہ قطر ہو جو ق قَ کی ط پر تنصیف کرتا ہے اور منحنی کو ن پر قطع کرتا ہے تو ت ن = ن ط۔

چونکہ ن ط، محور کے متوازی ہے اس لئے وہ سا میں سے گذرتا ہے۔

اس لئے قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت کی رو سے

(ت ط، ن سا) = -۱

∴ ت ن = ن ط

یہ یاد رہے کہ ت ا = ال (دفعہ ۱۲۳) اس مسئلہ کی صرف ایک مخصوص صورت ہے۔

۱۳۳- مسئلہ- قطع مکافی کے کسی ماسکی وتر کا طول اُس نقطہ سے ماسکہ کے فاصلہ کا چار گنا ہوتا ہے جس پر ماسکی وتر کی تنصیف کرنے والا قطر منحنی سے ملتا ہے۔

فرض کرو کہ ر س رَ کوئی ماسکی وتر ہے اور ن ط وہ قطر ہے جو اس ماسکی وتر کی تنصیف نقطہ ط پر کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ر اور رَ پر کے مماس نقطہ ے پر ملتے ہیں۔ اب ے مرتب پر بھی ہے اور قطر ن ط کے خط پر بھی۔ نیز ے ن = ن ط (دفعہ ۱۳۲)

لیکن ے س ط قائمہ زاویہ ہے (دفعہ ۱۰۶)

∴ س ن = ن ط = ے ن

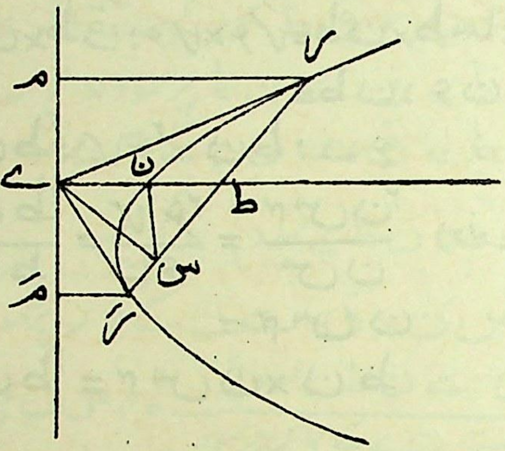
مرتب پر عمود ر م اور رَ مَ کھینچو تو

۲ ط ے = ر م + رَ مَ، کیونکہ ر رَ کا وسطی نقطہ ہے

= ر س + س رَ

= ر رَ

∴ ر رَ = ۴ ن ط = ۴ س ن



وہ ماسکی وتر جو کسی مخصوص قطر سے تنصیف ہو اُس قطر کا مبدل کہلاتا ہے جو وتر کی تنصیف کرتا ہے۔ مثلاً ر رَ قطر ن ط کا مبدل ہے اور ہم نے اِسے ۴ س ن کے مساوی ثابت کیا ہے۔ بالخصوص وتر خاص محور کا مبدل ہے اور ہم نے اِسے ۴ س ا کے مساوی ثابت کیا ہے۔

۱۳۴۔ مسئلہ۔ اگر ق ط، ایک قطر ن ط کا مُعین ہو تو

ق ط^{2} = ۴ س ن × ن ط

مُعین ق ط کو خارج کرو اور فرض کرو کہ وہ منحنی سے مکرر قَ پر ملتا ہے تو ق ط = ط قَ۔

وتر ق قَ کے متوازی ماسکی وتر ر س رَ کھینچو۔ فرض کرو کہ ن ط، ر رَ کو نقطہ ع پر تنصیف کرتا ہے۔

قطر ن ط منحنی سے کُرر لا تناہی پر کے نقطہ سا پر ملتا ہے اسلئے نیوٹن کے مسئلہ کی رو سے

طق × طقَ : طن × طسا = عر × عرَ : عن × عسا

∴ طق × طقَ : عر × عرَ = طن × طسا : عن × عسا

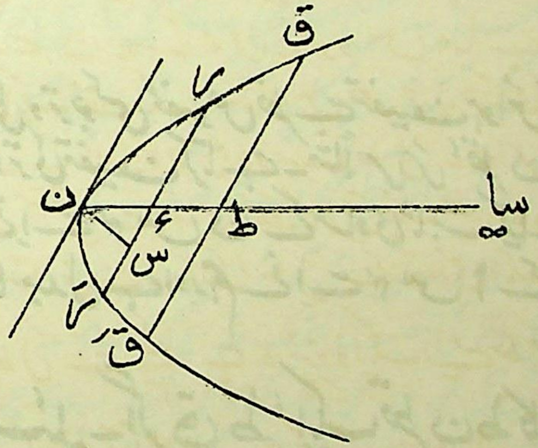
= طن : عن

∴ قط^{۲} : رع^{۲} = نط : نع

∴ $\frac{\text{قط}^{۲}}{\text{نط}} = \frac{\text{رع}^{۲}}{\text{نع}} = \frac{\text{۴سن}^{۲}}{\text{سن}}$ (دفعہ ۱۳۳) (137)

= ۴سن

∴ قط^{۲} = ۴سن × نط



یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۱۲ میں بیان کردہ خاصیت نل^{۲} = ۴اس × ال مذکورۂ بالا عام مسئلہ کی صرف ایک مخصوص صورت ہے۔

۱۳۵ — گذشتہ دفعہ کے مسئلہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قطع مکافی کو ایک مستوی میں ایک ایسے نقطہ کا طریق سمجھا جا سکتا ہے کہ ایک ثابت

خط لَ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے دوسرے ثابت خط لَ سے اسکا فاصلہ جہاں لَ کا ل کے علی القوائم ہوتا ضروری نہیں ہے خط ل قطع مکافی کا ایک قطر ہے اور لَ اُس نقطہ پر کا مماس ہے جس پر ل اور اور لَ متقاطع ہوتے ہیں ۔

اگر عہ وہ زاویہ ہو جو ق ط محور کے ساتھ بناتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۳۳) تو

ق ط = قَ سے ن ط پر عمود × قم عہ

اور ن ط = قَ سے ن پر کے مماس پر عمود × قم عہ

∴ (قَ سے ن ط پر عمود)^2 × قم^2 عہ

= ۴ س ن × قَ سے ن کے مماس پر عمود × قم عہ

$$\therefore \frac{(\text{قَ سے ن ط پر عمود})^2}{\text{قَ سے ن پر کے مماس پر عمود}} = \text{۴ س ن جب عہ} = \text{۴ س ما}$$

جہاں س سے ن پر کے مماس پر عمود س ما ہے ۔

(138) پس اگر ایک نقطہ ایک سُتوی میں اس طرح حرکت کرے کہ ایک خط ل سے اس کے فاصلہ کا مربع دوسرے خط لَ سے اس کے فاصلہ کا ک گُنا ہو (ک مستقل ہے) تو اِس نقطہ کا طریق ایک قطع مکافی ہے جس کا محور ل کے متوازی ہے ۔ ماسکہ، خط لَ کے متوازی ایک خط میں واقع ہے جسکا فاصلہ خط لَ سے $\frac{\text{ک}}{\text{۴}}$ ہے اور نیز وہ ایک ایسے خط میں واقع ہے جو ل اور لَ کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے اور لَ کے ساتھ وہی زاویہ بناتا ہے جو ل اس کے ساتھ بناتا ہے ۔ خط لَ مکافی کے اُس نقطہ پر کا مماس ہے جہاں خط ل منحنی کو قطع کرتا ہے ۔

جیساکہ دفعہ ۱۲۲ میں دکھایا جا چکا ہے اگر خطوط ل اور لَ علی القوائم ہوں تو ل خود محور ہو جاتا ہے اور لَ راس پر کا مماس ۔

۱۳۶ ـ دائرہ انحناء ـ

ہم دفعہ ۱۱۹ میں یہ سمجھا چکے ہیں کہ ایک مخروطی کے کسی نقطہ پر دائرہ انحنا، سے کیا مُراد ہے۔ اب ہم یہ بتائینگے کہ ایک قطع مکافی کے کسی نقطہ پر دائرہ انحنا، کس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ن پر کے دائرہ انحنا، کا مرکز، ن پر کے عماد پر واقع ہے۔ پس اگر ہم اِس دائرہ کے اُس وتر کا طول کسی سمت میں معلوم کر سکیں جو ن میں سے گذرتا ہے تو دائرہ کے قطر کا طول اِس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ وتر کے دوسرے سِرے میں سے ایک خط کھینچا جائے جو وتر پر عمود ہو اور عماد سے نقطہ د پر ملے۔ تب دائرہ انحنا، کا قطر ن د ہوگا۔

مسئلہ۔ ایک قطع مکافی کے کسی نقطہ ن پر کے دائرہ انحنا، کے وہ دو وتر جنمیں سے ایک محور کے متوازی ہے اور دوسرا ماسکہ میں سے گذرتا ہے ۴ س ن کے مساوی ہوتے ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ یہ دو وتر مساوی ہونے چاہئیں کیونکہ وہ ن پر کے مماس کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں۔

اب ایک دائرہ کا خیال کرو جو مکافی کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے اور اِسے مکرر ایک قریبی نقطہ ق پر قطع کرتا ہے۔ مکافی کا وہ قطر کھینچو جو ق میں سے گذرے اور فرض کرو کہ وہ دائرہ سے مکرر ک پر اور ن پر کے مماس سے سا پر ملتا ہے۔ قطر ن ط کا معین ق ط کھینچو۔

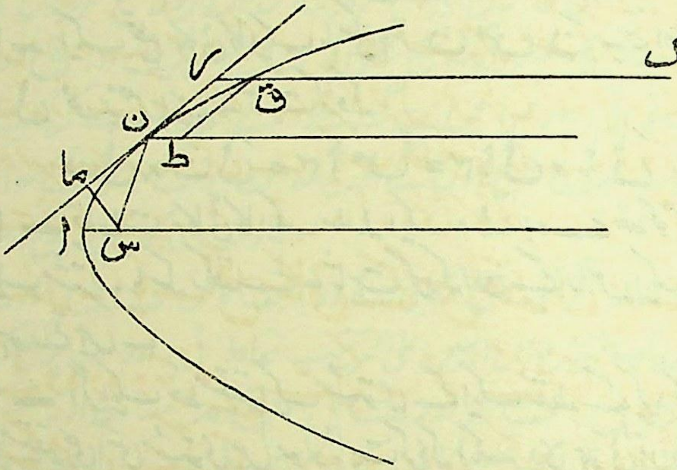
اب دائرہ سے

$$\text{سا ق} \times \text{سا ک} = \text{سا ن}^2$$

$$\therefore \text{سا ک} = \frac{\text{سا ن}^2}{\text{سا ق}} = \frac{\text{ق ط}^2}{\text{ن ط}} = \text{۴ س ن} \qquad \text{(دفعہ ۱۳۴)}$$

انتہا میں جبکہ ق، ن تک حرکت کرتا ہے اور بالآخر اُس پر منطبق ہوتا ہے سا ک دائرہ انحنا، کا وہ وتر ہو جاتا ہے جو ن میں سے (139)

گذرتا ہے اور محور کے متوازی ہے۔
اس لئے اس وتر کا طول ۴ س ن ہے۔



نتیجہ صریح۔ ن پر کے دائرۂ انحناء کا قطر = $\frac{\text{۴ س ن}^{۲}}{\text{س ما}}$ جہاں س ما مماس پہ عمود ہے۔ کیونکہ

$\frac{\text{۴ س ن}}{\text{قطر}}$ = جم (عماد اور محور کا درمیانی زاویہ)

= جب (مماس اور محور کا درمیانی زاویہ)

= جب (مماس اور س ن کا درمیانی زاویہ)

= $\frac{\text{س ما}}{\text{س ن}}$

نوٹ۔ دائرہ انحناء کے قطر کو بالعموم قطر انحناء کہتے ہیں اور دائرہ انحناء کے وتر جو ن میں سے گذرتے ہیں صرف انحناء کے وتر کہلاتے ہیں۔

مثالیں

۱ — ایک قطع مکانی کا ایک ماسکی وتر ن س نَ ہے اور ن ل اور نَ لَ محور پر معین ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ن ل} \times \text{نَ لَ} = ۴\,\text{اس}^{۲} = ۴\,\text{ال} \times \text{الَ}$$

۲ — قطعات مکانی کا ایک سلسلہ ایک دئے ہوئے خط کو مس کرتا ہے اور ایک مشترک ماسکہ رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے راس ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔

۳ — اگر ایک خط مستقیم ایک مُستوی کے ایک نقطہ کے گرد گردش کرے اور خود خط مستقیم بھی اُسی مُستوی میں ہو تو ثابت کرو کہ ایک دی ہوئی آن پر خط مستقیم کے نقطوں کی حرکت کی سمتیں ایک قطع مکانی کے مماسوں پر منطبق ہونگی۔

۴ — ایک قطع مکانی پر کے نقطوں کے مُعین ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم کئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اِن تقسیم کرنے والے نقطوں کا طریق ایک دوسرا قطع مکانی ہے۔

۵ — ایک قطع مکانی کے ماسکی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق بھی ایک قطع مکانی ہوتا ہے جسکا وتر خاص ابتدائی قطع مکانی کے وتر خاص کا نصف ہے۔

۶ — اگر قطر ن ط کا ایک معین ق ط ہو اور قطر پر عمود ق د ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ق د}^{۲} = ۴\,\text{اس} \times \text{ن ط}$$

۷ — اگر ایک قطع مکانی کا عماد نقطہ (ن) پر کھینچا جائے اور وہ محور سے گ پر ملے تو

$$\text{ن گ}^{۲} = ۴\,\text{اس} \times \text{س ن}$$

۸ — ایک قطع مکانی کے دو وتر ن ق، ن ر ہیں، ن ق اُس

قطر سے جو ر میں سے گذرتا ہے نقطہ ف پر ملتا ہے اور ن ر اُس قطر سے جو ق میں سے گذرتا ہے نقطہ ع پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ع ف ن پر کے مماس کے متوازی ہے۔

[قطع مکافی کی تظلیل ایک دائرہ میں اس طرح کرو کہ ع مرکز میں مظلل ہو جائے]

۹۔ اگر ایک دائرہ ایک قطع مکافی کو ن پر مس کرے اور ق اور ر پر قطع کرے تو ق اور ر میں سے گذرنے والے قطر دائرہ سے مکرر ایسے نقطوں پر ملینگے جو ایک خط میں واقع ہوں گے اور یہ خط ن پر کے مماس کے متوازی ہوگا۔

[دفعہ ۱۱۶ کا نتیجہ صریح استعمال کرو]

۱۰۔ اگر ایک قطع مکافی کے دو ثابت مماس ت ن اور ت ق ہوں اور ایک متغیر مماس انہیں علی الترتیب نقاط ل اور م پر قطع کرے تو نسبتیں ن ل : ت م اور ت ل : ق م مساوی اور مستقل ہونگی۔

۱۱۔ اگر ایک قطع مکافی کے دو مماس ت ن اور ت ق ایک تیسرے مماس سے نقطوں ل اور م پر منقطع ہوں تو

$$\frac{\text{ت ل}}{\text{ت ن}} + \frac{\text{ت م}}{\text{ت ق}} = 1$$

۱۲۔ اگر ایک قطع مکافی کا ن پر کا عماد منحنی سے مکرر ق پر ملے (141)
اور ن کا معیّن ن ل ہو اور ن ق کا قطب ت ہو تو

$$\text{ن ق} : \text{ن ت} = \text{ن ل} : \text{ا ل}$$

۱۳۔ اگر ن پر کا مماس مرتب سے ے پر ملے اور ممدودہ وتر خاص سے د پر ملے تو

$$\text{س د} = \text{س ے}$$

۱۴۔ ایک قطع مکافی کے مماس ت ن اور ت ق ہیں اور ن اور ق میں سے گذرنے والے مماس ت میں سے گذرنے والے کسی خط سے نقطوں م اور ل پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ت م}^2 = \text{ت ل}^2 = \text{ت ن} \times \text{ت ق}$$

۱۵ — اگر ایک قطع مکافی کے نقطہ ن پر کے مماس پر ت کوئی نقطہ ہو اور ت میں سے گذرنے والا قطر منحنی سے ق پر ملے تو

ر ن^2 = ۴ س ت × ر ق

۱۶ — اگر وتر ن ق جو ن پر ایک قطع مکافی کا عماد ہے س پر قائمہ زاویہ بنائے تو

س ق = ۲ س ن

۱۷ — اگر ایک قطع مکافی کے دو معین ن ل اور نَ لَ ایسے ہوں کہ وہ دائرہ جو ل لَ پر اسے قطر مانکر کھینچا گیا ہو قطع مکافی کو مس کرے تو

ل ن + لَ نَ = ل لَ

۱۸ — ایک قطع مکافی کے دو مماس ت ن اور ت ق ہیں اور ت ق اور ت ن پر علی الترتیب ن ک اور ق ل عمود کھینچے گئے۔ ثابت کرو کہ مثلثات س ت ک اور س ت ل مساوی ہیں

۱۹ — ایک قطع مکافی کے مماس ت ن اور ت نَ ہیں اور ت میں سے گذرنے والا قطر منحنی کو ق پر قطع کرتا ہے۔ اگر ن ق، نَ ق علی الترتیب ت نَ، ت ن کو ر اور رَ پر قطع کریں اور را اور رَ میں سے گذرنے والے قطر منحنی کو علی الترتیب ط، طَ پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ن ط اور نَ طَ، ت ق پر متقاطع ہوتے ہیں۔

[قطع مکافی کو ایک دائرہ میں اور ت میں سے گذرنے والے ن نَ کے متوازی خط کو لاتناہی پر ظلّل کرو]

۲۰ — ثابت کرو کہ کوئی دائرہ جو ایک قطع مکافی کے ایک وتر پر اسے قطر مانکر کھینچا گیا ہو مرتب سے نہیں ملسکتا اِلّا آنکہ وتر ایک ماسکی وتر ہو اور اس صورت میں دائرہ مرتب کو مس کریگا۔

۲۱ — اگر ایک قطع مکافی کے مماسوں کا ایک زوج ت ن اور ت ق ہو اور وتر ن ق، ن پر عماد ہو تو ت ن مرتب سے تنصیف ہوگا

۲۲ — مثلث ا ب ج ایک قطع مکافی کو جسکا ماسکہ س ہے

حائط کرتا ہے۔ ثابت کروکہ ا، ب، ج میں سے گذرنے والے وہ خطوط جو علی الترتیب س ا، س ب، س ج پر عمود ہیں ہم نقطہ ہیں۔

۲۳ — ایک قطع مکافی کے نقطوں ن اور نَ پر کے مماس ق پر متقاطع ہوتے ہیں اور وہ دائرے جو مثلثات س ن ق اور س نَ ق کو حائط کرتے ہیں محور سے مکرر ر اور رَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کروکہ ن ر اور ق رَ متوازی ہیں۔

(142) ۲۴ — ایک دیا ہوا مثلث ا ب ج ایک مستوی میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اسکا ایک ضلع ا ب ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے اور راس ا ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر رہتا ہے۔ ثابت کروکہ ضلع ا ج ایک قطع مکافی کو ملفوف کریگا۔

۲۵ — ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو دئے ہوئے دائروں پر اس سے ہمیشہ مساوی وتر منقطع ہوتے ہیں۔ ثابت کروکہ اس خط کا لفاف ایک قطع مکافی ہے جس کے راس پر کا مماس دے ہوئے دائروں کا بنیادی محور ہے۔

۲۶ — ایک خط ایک قطع مکافی سے محور کی ایک ہی جانب نقطوں ن اور نَ پر ملتا ہے۔ اق، ن نَ کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ منحنی سے مکرر نقطہ ق پر ملتا ہے۔ ثابت کروکہ ق کا معین، ن اور نَ کے معینوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۲۷ — ایک قطع مکافی کے دو مماسوں کے نقطہ تقاطع کا محور سے فاصلہ ان کے نقاط تماس کے معینوں کے مجموعہ کا نصف ہوتا ہے۔

۲۸ — اگر ایک قطع مکافی کا وتر خاص خ خَ ہو اور کسی نقطہ ن پر کا مماس نقطہ خ پر کے مماس سے نقطہ ط پر ملے تو ثابت کروکہ

س خَ × خ ن = ط خ × ط خَ

۲۹ — ایک دائرہ ایک قطع مکافی کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے اور ماسکہ س میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کروکہ قطع مکافی دائرہ سے مکرر ملیگا یا نہیں ملیگا بموجب اس کے کہ وتر خاص، س ن سے کم ہو یا نہ ہو۔

۳۰ — ایک قطع مکافی کے نقطہ ق پر کا عماد ق قَ ہے جو قطع مکافی سے مکرر قَ پر ملتا ہے۔ ق ن، محور اور عماد دونوں کے ساتھ مساوی طور پر مائل ہے اور منحنی سے مکرر نقطہ ن پر ملتا ہے۔ ق قَ کا نقطہ وسطی ط ہے اور ن ط محور سے نقطہ ر پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق س ن ر ایک ہی دائرہ پر واقع ہیں جہاں س قطع مکافی کا ماسکہ ہے۔

۳۱ — مساوی وتر خاص والے دو قطعات مکافی ایک ہی محور پر ہیں اور ایسے ہیں کہ ایک کے کسی مماس کا وہ حصہ جو دوسرے سے منقطع ہوتا ہے اُس عمود کے مساوی ہے جو اس مماس پر پہلے قطع مکافی کے ماسکہ سے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک کا وتر خاص اِن کے راسوں کے درمیانی فاصلہ کا ۶۴ گُنا ہے۔

۳۲ — ایک دائرہ ایک قطع مکافی کو محور کے دوہرے معین ن نَ کے دونوں سروں پر مس کرتا ہے۔ ن پر کا عماد دائرہ سے نقطہ ر پر اور مکافی سے نقطہ ق پر ملتا ہے۔ قطع مکافی کا وہ قطر جو ق میں سے گذرتا ہے ن نَ سے نقطہ ع پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ ق ر ع، ن نَ کو ع پر مس کرتا ہے۔

۳۳ — ایک قطع مکافی کے محور کا ایک دُوہرا معین ع ف ہے اور اِس پر کوئی نقطہ ر ہے۔ ر میں سے گذرنے والا قطر منحنی سے نقطہ ن پر ملتا ہے۔ ن پر کا مماس ع اور ف میں سے گذرنے والے قطروں کو م اور ل پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ر، ع م اور ف ل کے درمیان ایک وسط تناسب ہے۔

۳۴ — اگر ایک قطع مکافی دوسرے مساوی قطع مکافی پر لڑھکے اور ابتداً اِن کے راس ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں تو ثابت کرو کہ قبل الذکر قطع مکافی کا ماسکہ ثابت قطع مکافی کا مرتب مرتسم کریگا۔

۳۵ — اگر ایک قطع مکافی پر جس کا راس ا ہے کوئی نقطہ ن ہو اور ن ر، ا ن پر عمود ہو اور محور سے ر پر ملے تو وہ دائرہ جس کا مرکز ر اور نصف قطر ر ا ن ہو اُس معین کے سروں میں سے گذریگا جو ر میں سے کھینچا گیا ہے۔ نیز اگر دائرہ اور قطع مکافی کے مشترک مماس کھینچے جائیں تو اُن نقطوں کے

معین جہاں وہ قطع مکافی کو مس کرتے ہیں دائرہ کے مماس ہونگے ۔

۳۶ ۔ ایک قطع مکافی پر کے کسی نقطہ میں سے دو وتر کھینچے گئے ہیں جو اِس نقطہ پر کے مماس سے مساوی طور پر مائل ہیں ۔ ثابت کرو کہ ان وتروں کے طول اِن کے قطروں کے اُن حصوں کے متناسب ہیں جو اِن کے اور منحنی کے درمیان منقطع ہوتے ہیں ۔

۳۷ ۔ ایک قطع مکافی کے مماس ت ق اور ت ر، ن پر کے مماس سے نقطوں ما اور ے پر ملتے ہیں اور ت ع، محور کے متوازی کھینچا گیا ہے جو قطع مکافی سے ع پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ع پر کا مماس، ما ے کے وسطی نقطہ میں سے گذرتا ہے اور یہ کہ اگر س ماسکہ ہو تو

$$\text{ما ے}^{2} = \text{۴ س ن} \times \text{ت ع}$$

۳۸ ۔ ن ق، ایک قطع مکافی کا ایک عمادی وتر ہے جو محور سے گ پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ راس سے گ کا فاصلہ، ن اور ق کے معین، اور وتر خاص چار تناسبات ہیں ۔

۳۹ ۔ ایک قطع مکافی کے ماسکہ میں سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو قطع مکافی کے مماسوں کو ایک مستقل زاویہ پر قطع کرتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے ۔

۴۰ ۔ قطع مکافی کے وتر خاص کے ایک سرے پر کا نصف قطر انحناء عماد کے دوچند کے مساوی ہوتا ہے ۔

۴۱ ۔ قطع مکافی کے وتر خاص کے کسی سرے پر کا قطر اِس کے دوسرے سرے پر کے دائرہ انحناء کے مرکز میں سے گذرتا ہے ۔

۴۲ ۔ اگر ایک قطع مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس محور سے نقطہ ت پر ملے اور دائرہ انحنا منحنی سے نقطہ ق پر ملے تو ن ق = ۴ ن ت ۔

۴۳ ۔ اگر ایک قطع مکافی کے نقطہ ن پر کے نصف قطر انحناء کا وسطی نقطہ ر ہو تو ن ر کے محاذی ماسکہ پر ایک قائمہ زاویہ بنے گا ۔

۴۴ — قطع مکافی کے کسی نقطہ سے اِس کے راس پر کے دائرۂ انحناد کا مماس اِس نقطہ کے فصلہ کے مساوی ہوتا ہے ۔

۴۵ — قطع مکافی کے کسی نقطہ پر راس ا میں سے گذرنیوالا وترِ انحناد $\frac{۴\,\text{ن ما}^{۲}}{\text{ان}}$ ہوتا ہے جہاں ما اُس عمود کا پائین ہے جو ماسکہ سے ن پر کے مماس پر کھینچا گیا ہے ۔

بارہواں باب

قطع ناقص

۱۳۷ — ہم نے دفعات (۹۸) اور (۹۹) میں قطع ناقص کی عام شکل دکھادی ہے اور یہ ثابت کیا ہے کہ اس کے تشاکل کے دو محور ایک دوسرے کے علی القوائم ہوتے ہیں جو ج پر جسے مرکز کہتے ہیں متقاطع ہوتے ہیں۔ محور اعظم ا اَ پر دو ماسکے س اور سَ ہوتے ہیں جن کا فاصلہ محور اصغر کے سروں ب اور بَ سے ج ا کے مساوی ہوتا ہے اور ان ماسکوں کے جواب میں دو مرتب، ا اَ کے علی القوائم ہوتے ہیں اور اسے خارجاً لا اور لاَ پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ج س : ج ا = ج ا : ج لا = ز جہاں ز خروج المرکز ہے۔ محور اعظم کے سروں ا اور اَ کو قطع ناقص کے راس کہنے میں سہولت ہے۔

یہ ذہن نشیں رہے کہ نسبت ج س : ج ا جتنی چھوٹی ہوگی قطع ناقص دائری شکل کے قریب تر ہوگا اور ج س : ج ا اکائی کو پہنچے بغیر جتنا بڑا ہوگا قطع ناقص زیادہ تر پھیلتا جائیگا۔

چونکہ ہمیشہ

$$\text{ج س}^{٢} = \text{ج ا}^{٢} - \text{ج ب}^{٢}$$

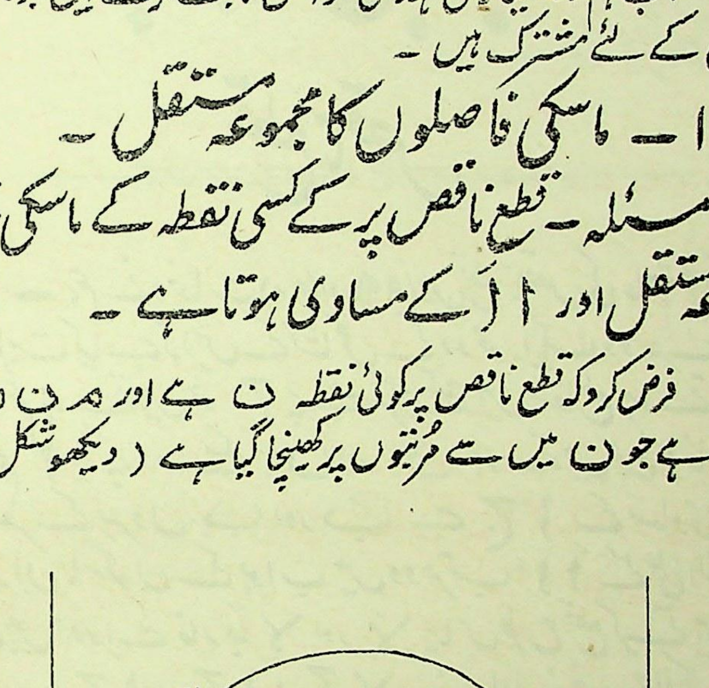
اس لئے اگر ج ا کو مستقل کیا جائے تو جیسے ج س بڑھتا ہے ج ب گھٹتا ہے اور بالعکس۔ اور ہم یہ سمجھا چکے ہیں کہ ایک دائرہ کو ایک قطع ناقص کی انتہائی صورت سمجھا جا سکتا ہے جبکہ ناقص کے دو ماسکے مرکز پر منطبق ہوں۔

اب ہم وہ امتیازی ہندسی خواص ثابت کرتے ہیں جو تمام قطعات ناقص کے لئے مشترک ہیں۔

۱۳۸ – ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل۔

مسئلہ – قطع ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل اور ا اَ کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ قطع ناقص پر کوئی نقطہ ن ہے اور م ن مَ وہ عمود ہے جو ن میں سے مرتبوں پر کھینچا گیا ہے (دیکھو شکل)۔ (145)



اب س ن = ز × ن م اور سَ ن = ز × ن مَ

∴ س ن + سَ ن = ز (م ن + ن مَ) = ز × لا لاَ

اَا = اج ۲ = لا ج × ز ۲ =

نتیجہ صریح ۔ دو ہم ماسکی قطعات ناقص (یعنے جن میں دونوں ماسکے مشترک ہوں) ایک دوسرے کو قطع نہیں کر سکتے ۔

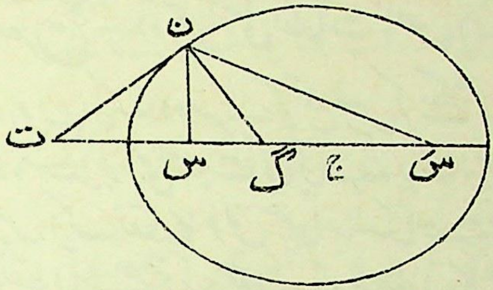
۱۳۹ ۔ وہ مسئلہ جو ابھی ثابت کیا گیا ہے یہ ظاہر کرتا ہے کہ قطع ناقص کو ایک مستوی میں ایک نقطہ کا طریق سمجھا جا سکتا ہے جبکہ اُس مستوی میں کے دو ثابت نقطوں سے متحرک نقطہ کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہے۔ اور اس سے ہم یہ سیکھتے ہیں کہ اگر تاگے کے ایک ٹکڑے کے سروں کو دو پنوں سے جو کاغذ میں کھڑی نصب کی گئی ہوں باندھ دیا جائے اور باندھتے وقت تاگا تنا ہوا نہ رہے اور پھر پنسل کے ذریعہ تاگا کو تنا کر پکڑا جائے اور پنسل کی نوک سے تمام ممکن محلوں پر نشان لگائے جائیں تو اس طرح ایک قطع ناقص حاصل ہو جائیگا۔

تاگے کو ایک ہی طول کا رکھنے اور پنوں کا درمیانی فاصلہ تبدیل کرنے سے ہم وہ تمام قطعات ناقص کھینچ سکتے ہیں جن کا محور اعظم تو ایک ہی ہے لیکن خروج المرکز جدا جدا ہیں ۔ یہ معلوم ہو گا کہ پن جتنے زیادہ باہم قریب ہونگے قطع ناقص دائری شکل کے قریب آتا جائیگا۔

۱۴۰ ۔ مماس اور عماد ۔

مسئلہ ۔ قطع ناقص کے کسی نقطہ پر کے مماس اور عماد اس نقطہ کے ماسکی فاصلوں کے درمیانی زاوئے کی علی الترتیب خارجی اور داخلی تنصیف کرتے ہیں ۔

(146) فرض کرو کہ ن پر کے مماس اور عماد محور اعظم سے علی الترتیب ت اور گ پر ملتے ہیں ۔



اب دفعہ ۱۱۱ کی رو سے

س گ = ز × سَ ن اور سَ گ = ز × سَ ن

∴ س گ : گ سَ = س ن : ن سَ

∴ ن گ زاویہ س ن سَ کی تنصیف کرتا ہے۔

∴ ن ت کو جو ن گ کے علی القوائم ہے س ن سَ کے خارجی زاوئے کی تنصیف کرنا چاہیئے۔

نتیجۂ صریح۔ ج گ × ج ت = ج س^{۲}

کیونکہ ن گ اور ن ت، س ن اور سَ ن کے درمیانی زاویوں کے ناصف ہیں اور اسلئے

(گ ت، س سَ) = -۱

۱۴۱۔ مسئلہ۔ اگر قطع ناقص کے کسی نقطہ ن کے مماس پہ ماسکوں سے عمود س ما، سَ ما ہوں تو ما اور مَا اس دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جو محور اعظم ا اَ پر اسے قطر مانکر کھینچا گیا ہو اور

س ما × سَ مَا = ب ج^{۲}

س ما کو خارج کرو کہ وہ سَ ن سے ک پر ملے ۔

اب

△ س ن ما ≡ △ ک ن ما

کیونکہ ∠ س ن ما = ∠ ک ن ما (دفعہ ۱۴۰)

∠ س ما ن = ∠ ک ما ن، قائمہ زاویے ہونیکی وجہ سے،

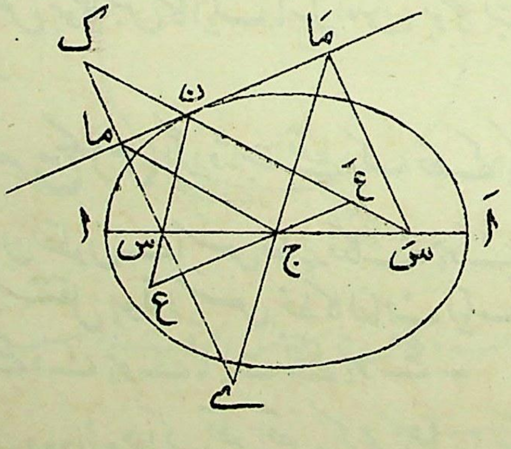
اور ن ما مشترک ہے

∴ ن ک = س ن اور ک ما = س ما

∴ ک سَ = ک ن + ن سَ = س ن + ن سَ = ا اَ (دفعہ ۱۳۸)

اب چونکہ ما اور ج، س ک اور س سَ کے وسطی نقطے ہیں اس لئے ج ما، سَ ک کے متوازی ہے اور ج ما = $\frac{1}{2}$ سَ ک = ج ا

(147) پس ما (اور اسی طرح مَا) اس دائرہ پر واقع ہے جو ا اَ پر اسے قطر مانکر کھینچا گیا ہو ۔



مزید بریں چونکہ مَا ما س ایک قائمہ زاویہ ہے اسلئے ما س اِس دائرہ سے مکرر ایک ایسے نقطہ ے پر ملیگا کہ مَا ے ایک قطر ہوگا یعنی مَا ے، ج میں سے گذریگا۔

اور △ ج س ے ≡ ج سَ مَا، اسلئے س ے = سَ مَا

∴ س ما × سَ مَا = س ما × س ے = اس × س اَ

= ج ا^2 − ج س^2 = ب ج^2

نتیجۂ صریح (۱) ۔ ن پر کے مماس کا متوازی قطر، س ن اور سَ ن سے ایسے نقطوں ع اور عَ پر ملیگا کہ ن ع = ن عَ = ا ج ۔

کیونکہ ن ما ج عَ ایک متوازی الاضلاع ہے، اسلئے

ن عَ = ج ما = ا ج

اور اسی طرح ن ع = ا ج

نتیجۂ صریح (۲) اگر ایک ثابت نقطہ س سے ایک خط پر عمود نکالا جائے اور اسکا پائین ایک ثابت دائرہ پر داقع ہو تو اس خط کا لفاف ایک قطع ناقص ہوگا جس کا ایک ماسکہ س ہوگا بشرطیکہ س دائرہ کے اندر ہو ۔

نتیجۂ صریح (۳) اگر دو ثابت نقطے ایک خط کے ایک ہی جانب واقع ہوں اور اِن نقطوں سے اِس خط پر نکالے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو تو اِس خط کا لفاف ایک قطع ناقص ہوگا جس کے ماسکے دئے ہوئے ثابت نقطے ہونگے ۔

تعریف ۔ وہ دائرہ جو ایک قطع ناقص کے محور اعظم پر اسے قطر مانکر کھینچا جائے

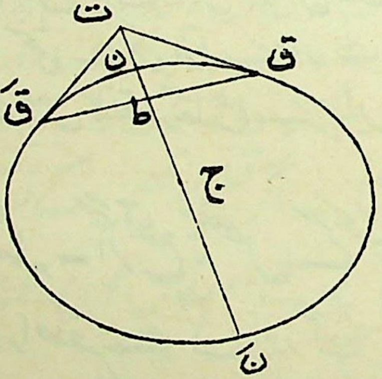
امدادی دائرہ کہلاتا ہے۔

۱۴۲ ۔ مسئلہ ۔ اگر ایک قطع ناقص کے مماسوں کا ایک زوج ت ق اور ت قَ ہو اور قطع ناقص کا مرکز ج ہو اور ج ت، ق قَ سے ط پر اور منحنی سے ن پر ملے تو

ج ط × ج ت = ج ن^{۲}۔

(148) فرض کرو کہ ن ج قطع ناقص سے مکرر نَ پر ملتا ہے۔ اب چونکہ ت اور ق قَ قطب اور قطبی ہیں اسلئے (ت ط، ن نَ) = -۱

∴ ج ط × ج ت = ج ن^{۲} کیونکہ ن نَ کا وسطی نقطہ ج ہے۔



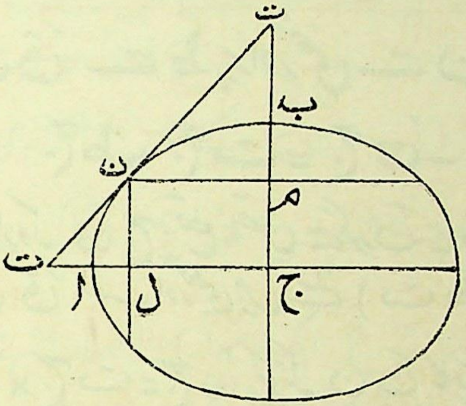
۱۴۳ ۔ دفعہ ما سبق کا مسئلہ اہم ہے اور حسب ذیل اس کی ایک خاص صورت ہے۔

اگر ن پر کا مماس محاور اعظم اور اصغر سے ت اور ت پر ملے

اور اِن محوروں پر معین ن ل، ن م ہوں تو

ج ل × ج ت = ج ا²

ج م × ج ت′ = ج ب²

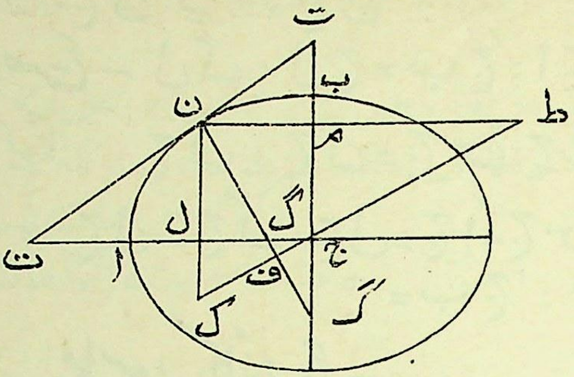


کیونکہ ت، ن پر کے مماس اور اُس نقطہ پر کے مماس کا نقطہ تقاطع ہے جہاں ن ل منحنی سے مکرر ملتا ہے اور ت′ ن پر کے مماس اور اُس نقطہ پر کے مماس کا نقطہ تقاطع ہے جہاں ن م منحنی سے مکرر ملتا ہے۔

(149) ۱۴۴۔ مسئلہ۔ اگر قطع ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا عماد محاور اعظم اور اصغر سے گ اور گ′ پر ملے اور ن پر کے مماس کے متوازی قطر سے ف پر ملے تو

ن ف × ن گ = ب ج² اور ن ف × ن گ′ = ا ج²

محوروں پر معین ن ل اور ن م کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ن پر کے مماس کے متوازی قطر سے ک اور ط پر ملتے ہیں (دیکھو شکل)۔



فرض کرو کہ ن پر کا مماس محاور اعظم اور اصغر سے ت اور ت پر ملتا ہے۔

اب ل ک ف گ دائری ہے کیونکہ ل اور ف قائمہ زاوئے ہیں۔

∴ ن ف × ن گ = ن ل × ن ک = ج م × ج ت = ب ج^{۲}

نیز گ ف م ط دائری ہے کیونکہ ف اور م قائمہ زاوئے ہیں۔

∴ ن ف × ن گ = ن م × ن ط = ج ل × ج ت = ج ا^{۲}

۱۴۴ ۔ مسئلہ۔ اگر قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد محور اعظم سے گ پر ملے اور اس محور پر ن ل معین ہو تو

ج گ = ز^{۲} × ج ل

فرض کرو کہ ن پر کا مماس محور اعظم سے ت پر ملتا ہے۔

دفعہ ۱۴۰ میں ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ ج گ × ج ت = ج س^{۲}

لیکن ج ل × ج ت = ج ا^{۲}

∴ ج گ : ج ل = ج س^{۲} : ج ا^{۲} = ز^{۲}

ج گ = ز^{2} × ج ل

نتیجہ صریح - ل گ : ل ج = ب ج^{2} : ا ج^{2}

کیونکہ ج گ : ج ل = ج س^{2} : ج ا^{2}

∴ ج ل - ج گ : ج ل = ج ا^{2} - ج س^{2} : ج ا^{2}

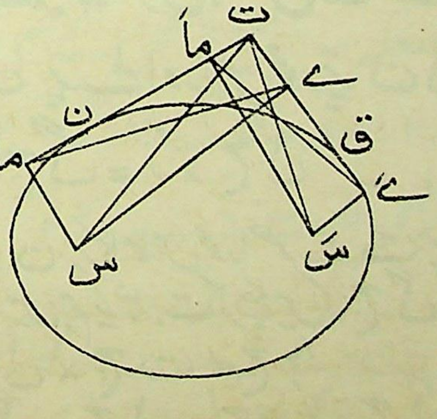
= ب ج^{2} : ا ج^{2}

۱۴۴ اب - مماسوں کا زوج - (150)

مسئلہ - اگر ایک بیرونی نقطہ سے قطع ناقص کے دو مماس کھینچے جائیں تو وہ اس کے ماسکی فاصلوں کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں -

فرض کرو کہ ت ن اور ت ق مماس ہیں، یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ ∠ ن ت س = ∠ سَ ت ق -

ت ن پر عمود س ما اور سَ مَا کھینچو اور ت ق پر عمود س ے اور سَ ےَ نکالو -



اب س ما × سَ مَا = ب ج^2 = س ے × سَ ے

(دفعہ ۱۴۱)

∴ س ما : س ے = سَ ے : سَ مَا

نیز ∠ ما س ے = ∠ ما ت ے کا تتمہ

(کیونکہ س ما ت ے دائری ہے)

= ∠ مَا سَ ے (کیونکہ مَا ت ے سَ دائری ہے)

∴ △ س ما ے اور سَ ے مَا متشابہ ہیں اور

∠ س ے ما = ∠ سَ مَا ے

لیکن ∠ س ے ما = ∠ س ت ما ‘ ایک ہی قطاع میں ہیں

اور ∠ سَ مَا ے = ∠ سَ ت ے ‘ ” ”

∴ ∠ س ت ما = سَ ت ے

۱۴۵ — مرتب دائرہ —

مسئلہ — اُن نقطوں کا طریق جن سے قطع ناقص کے مماس علی القوائم ہوں ایک دائرہ ہوتا ہے (جسے قطع ناقص کا مرتب دائرہ کہتے ہیں)۔

فرض کرو کہ دو مماس ت ن اور ت ق علی القوائم ہیں۔ ت ن پر عمود س ما کھینچو کہ وہ سَ ن سے ک پر ملے۔

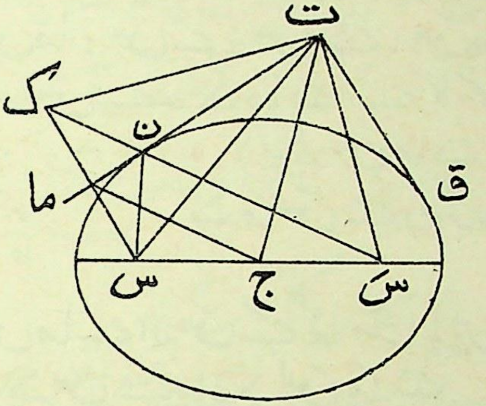
اب دفعہ ۱۴۱ کی رو سے س ما = ما ک اور سَ ک = ا اَ

نیز △ س ما ت ≡ △ ک ما ت کیونکہ س ما = ک ما اور ما ت مشترک ہے اور ما پر کے زاویے قائمہ ہیں۔

∴ س ت = ک ت اور ∠ ک ت ن = ∠ س ت ن

= ∠ ق ت سَ (دفعہ ۱۴۴ ب)

∴ ∠ ک ت سَ = ∠ ن ت ق = ایک قائمہ زاویہ



اب ۲ ج ت^{۲} + ۲ ج س^{۲} = س ت^{۲} + سَ ت^{۲} (دفعہ ۱۰)

= ک ت^{۲} + سَ ت^{۲}

= ک سَ^{۲}

= ۴ ج ا^{۲}

∴ ج ت^{۲} = ۲ ج ا^{۲} − ج س^{۲} = ۲ ج ا^{۲} − (ج ا^{۲} − ج ب^{۲})

= ج ا^{۲} + ج ب^{۲}

پس ت کا طریق، ج کے گرد ایک دائرہ ہے اور اس کے نصف قطر کا مربع ج ا^{۲} + ج ب^{۲} ہے۔

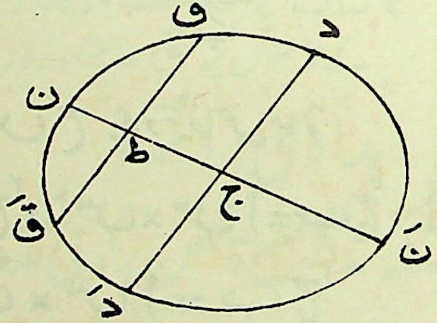
۱۴۶ — مزدوج قطر۔

طالب علم ایک مخروطی کے مزدوج خطوں کے مفہوم سے پہلے سے ہی آگاہ ہے کہ دو خطوط اس وقت مزدوج کہلاتے ہیں جب ہر ایک میں دوسرے کا قطب واقع ہو۔ جب مزدوج خطوں کا ایک زوج ایک قطع ناقص کے مرکز پر ملے تو انہیں مزدوج قطر کہتے ہیں

سہولت ہو گی کیونکہ ان میں سے ہر خط قطر بھی ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ مزدوج قطر ایسے ہوتے ہیں کہ اُن نقطوں پر کے مماس جہاں اِن میں سے کوئی ایک منحنی سے ملتا ہے دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔ مزید بریں وہ تمام وتر جو دو مزدوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہوں دوسرے سے تنصیف ہوتے ہیں (دفعہ ۹۵) اور یہ وترائیں قطر کے دوسرے معیّن ہیں جو انکی اس طرح تنصیف کرتا ہے۔ قطع ناقص کے محور مزدوج قطروں کا وہ مخصوص زوج ہیں جو باہم علی القوائم ہیں۔

(152) **۱۴۷۔ مسئلہ۔ اگر ق ط، ایک قطع ناقص کے قطر ن ج نَ کا ایک معیّن ہو اور ج ن کا مزدوج قطر ج دَ ہو تو**

ق ط^2 : ن ط × ط نَ = ج دَ^{2} : ج ن^2



ق ط کو خارج کرو کہ وہ قطع ناقص سے مکرر قَ پر سے ملے تو نیوٹن کے مسئلہ کی رو سے

ط ق × ط قَ : ط ن × ط نَ = ج د × ج دَ : ج ن × ج نَ

لیکن ط قَ = ـ ط ق، ج دَ = ـ ج د، ج نَ = ـ ج ن

∴ ق ط^2 : ن ط × ط نَ = ج دَ^{2} : ج ن^2

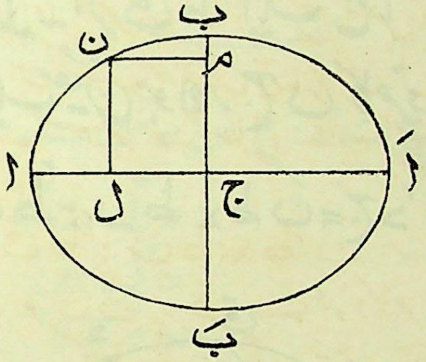
۱۴۸ ـ مسئلہ ماسبق کی خاص صورتیں حسب ذیل ہیں ۔

اگر ن ل اور ن م، ایک قطع ناقص کے محاور اعظم اور اصغر کے معیّن ہوں تو

ن ل^2 : ال × ل اَ = ب ج^2 : ا ج^2 ،

اور ن م^2 : ب م × م بَ = ا ج^2 : ب ج^2

نتیجہ صریح ـ وتر خاص = ۲ ب ج^2 / ا ج



کیونکہ اگر س خ نیم وتر خاص ہو تو (153)

س خ^2 : ا س × س اَ = ب ج^2 : ا ج^2

اور ا س × س اَ = ب ج^2

۱۴۹ ـ دفعہ ۱۴۸ کے خواص سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قطع ناقص کو ایک مستوی میں ایسے نقطہ کا طریق سمجھا جا سکتا ہے کہ اس مستوی کے ایک ثابت خط ل سے اس کے فاصلہ کا مربع، دو دوسرے ثابت خطوں لَ اور لً سے اس کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے جہاں خطوط لَ اور لً، خط ل پر عمود ہیں اور نقطہ کی مخالف سمتوں میں واقع ہیں ۔

خط ل، قطع ناقص کے محوروں میں سے ایک ہے اور خطوط لَ اور لً، دوسرے محور کے سِروں پر مماس ہیں۔

دفعہ ۱۴۷ میں ثابت شدہ خاصیت سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قطع ناقص کو ایک مُستوی میں ایسے نقطہ کا طریق بھی سمجھا جا سکتا ہے کہ اُس مُستوی کے ایک ثابت خط ل سے اس کے فاصلہ کا مربع، دو دوسرے ثابت خطوں لَ اور لً سے اِس کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھے جہاں خطوط لَ اور لً ایک دوسرے کے متوازی ہیں (لیکن اِنکا خط ل پر عمود ہونا ضروری نہیں ہے) اور نقطہ کی مخالف سمتوں میں واقع ہیں۔ خط ل، قطع ناقص کا ایک قطر ہے اور خطوط لَ اور لً، اُن نقطوں پر مماس ہیں جہاں ل منحنی سے ملتا ہے۔ کیونکہ طالب علم خود آسانی سے یہ ثابت کر سکتا ہے کہ

حسب ترقیم دفعہ ۱۴۷

ق ط^{۲} : ن ط × ط نَ

= ن نَ پر ق سے عمود کا مربع : ق اور قَ پر کے مماسوں پر ق سے عمودوں کا حاصل ضرب

امدادی دائرہ

۱۵۰۔ مسئلہ۔ اگر قطع ناقص پر کوئی نقطہ ن ہو اور محور اعظم کا معیّن ن ل ہو اور اگر ل ن امدادی دائرہ سے نقطہ نَ پر ملے تو

لَ نَ : ل ن = ب ج : ا ج

دفعہ ۱۴۸ کی رو سے

ن ل^{۲} : ا ل × ل اَ = ب ج^{۲} : ا ج^{۲}

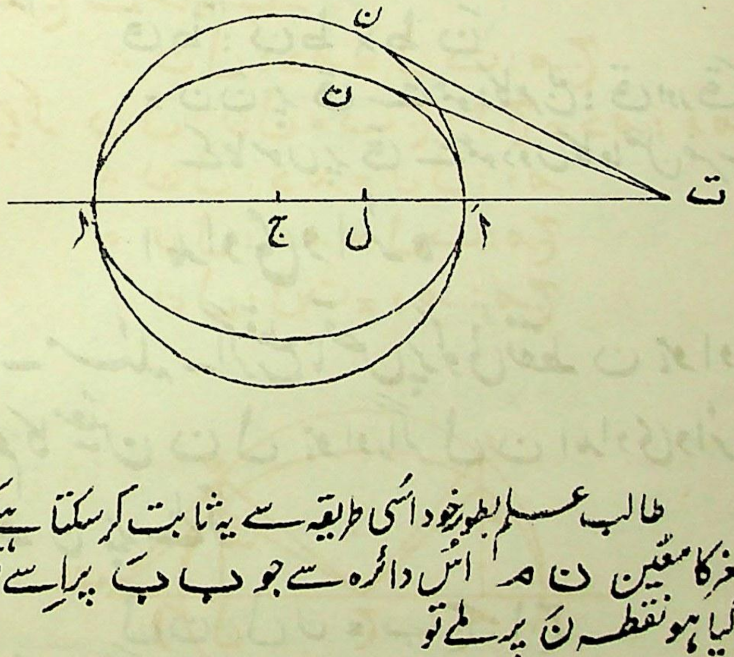
اور چونکہ ا ن اَ ایک نیم دائرہ میں ہے وہ ایک قائمہ زاویہ ہے اسلئے

ن لَ² = ا ل × ل اَ

∴ ن ل : نَ ل = ب ج : ا ج

نَ اور ن کو قطع ناقص اور امدادی دائرہ پر **نظیری نقطے** کہتے ہیں۔ دو نظیری نقطوں پر کے مماس محور اعظم کے خط سے ایک ہی نقطہ پر ملینگے کیونکہ فرض کرو کہ محور اعظم کے خط سے نقطہ ن کا مماس نقطہ ت پر ملتا ہے تو ج ل × ا ج ت = ج اَ² (دفعہ ۱۴۳) (154)

∴ دائرہ کے لحاظ سے ت، ن ل کا قطب ہے یعنی نَ پر کا مماس ت میں سے گذرتا ہے۔



طالب علم بطور خود اسی طریقہ سے یہ ثابت کر سکتا ہے کہ اگر محور اصغر کا معیّن ن م اُس دائرہ سے جو ب بَ پر اِسے قطر مان کر بنایا گیا ہو نقطہ نَ پر ملے تو

ن م : نَ م = ا ج : ب ج

اِس تمام بحث سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک دائرہ کے ایک قطر کے

معین سب کے سب ایک ہی نسبت میں تقسیم کئے جائیں تو نقاط تقسیم ایک قطع ناقص مرتسم کرینگے جس کا ایک محور، دائرہ کا مذکورہ بالا قطر ہوگا۔

۱۵۱ — مسئلہ۔ اگر ج ن اور ج د، ایک قطع ناقص کے مزدوج نیم قطروں کا ایک زوج ہوں اور ن اور د کے جواب میں امدادی دائرے پر نقطے ن اور د ہوں تو ن ج د ایک قائمہ زاویہ ہوگا۔

فرض کرو کہ ن اور ن پر کے مماس محور اعظم سے ت پر ملتے ہیں۔ معین ن ل اور د م کھینچو۔

اب چونکہ ج د، ت ن کے متوازی ہے اس لئے △ ن ل ت، △ د م ج کے متشابہ ہے۔

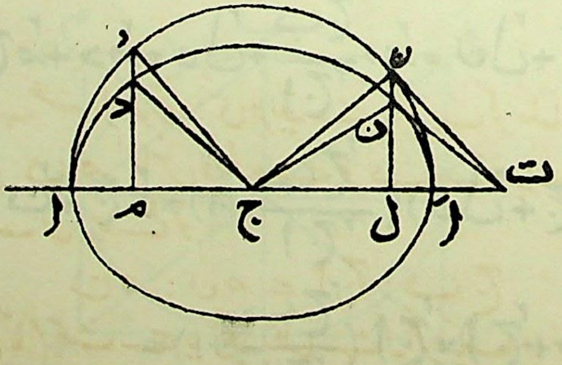
∴ ن ل : د م = ل ت : م ج

لیکن چونکہ ن ل : ن ل = ب ج : ا ج = د م : د م

(155) ∴ ن ل : د م = ن ل : د م

∴ ن ل : د م = ل ت : م ج

یعنے ن ل : ل ت = د م : م ج



∴ چونکہ △ ن ل ت اور د م ج میں م اور ل پر کے زاویے مساوی ہیں اس لئے وہ متشابہ ہیں۔

∴ ∠ م ج د = ∠ ل ت ن

∴ ج د، ت ن کے متوازی ہے۔

∴ ∠ د ج ن = ∠ ج ن ت = ایک قائمہ زاویہ

نتیجۂ صریح۔ ن ل = ج م اور د م = ج ل

کیونکہ △ ج ل ن ≡ △ د م ج

اس لئے نیز

ن ل : ج م = ب ج : ا ج

د م : ج ل = ب ج : ا ج

۱۵۲ — مسئلہ۔ اگر ایک قطع ناقص کے مزدوج نیم قطر ج ن اور ج د ہوں تو

ج ن۲ + ج د۲ = ج ا۲ + ج ب۲

دفعہ ماسبق کی شکل استعمال کرنے سے

ج ن۲ = ج ل۲ + ن ل۲ = ج ل۲ + (ب ج۲ / ا ج۲) × ن ل۲

اور ج د۲ = ج م۲ + د م۲ = ن ل۲ + (ب ج۲ / ا ج۲) د م۲ = ن ل۲ + (ب ج۲ / ا ج۲) ج ل۲

∴ ج ن۲ + ج د۲ = (۱ + ب ج۲ / ا ج۲) (ن ل۲ + ج ل۲)

= (۱ + ب ج۲ / ا ج۲) ا ج۲ = ا ج۲ + ب ج۲

(156) اِس طرح قطع ناقص کے دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل اور $\text{ا اَ}^{٢} + \text{ب بَ}^{٢}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

اِس مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر بھی ثابت کر سکتے ہیں۔
دفعہ ۱۵۱ میں ثابت کیا گیا ہے کہ ن ل = ج مَ

$$\therefore \text{ج مَ}^{٢} + \text{ج لَ}^{٢} = \text{ن لَ}^{٢} + \text{ج لِ}^{٢} = \text{ج نَ}^{٢} = \text{ا جَ}^{٢}$$

ٹھیک اُسی طرح محور اصغر کے معیّن کھینچنے اور ب بَ پر اِسے قطر مانکر جو دائرہ کھینچا جائے اُسے استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

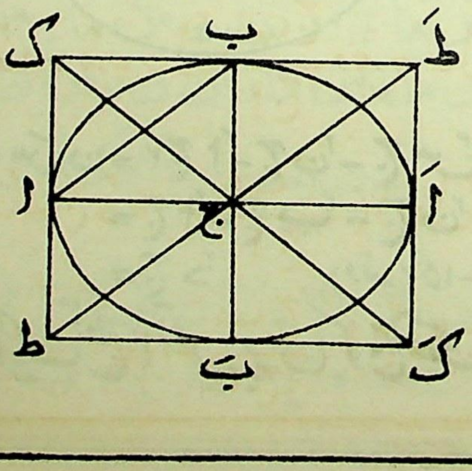
$$\text{ن لَ}^{٢} + \text{د مَ}^{٢} = \text{ب ج}^{٢}$$

اِس لئے جمع کرنے سے

$$\text{ج نَ}^{٢} + \text{ج دَ}^{٢} = \text{ا جَ}^{٢} + \text{ب ج}^{٢}$$

۱۵۲ — مساوی مزدوج قطر —

قطع ناقص کے مزدوج قطروں کا ایک زوج ایسا ہوتا ہے کہ قطر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں یعنے وہ قطر جو اُس مستطیل کے وتروں پر واقع ہیں جو محاور اعظم اور اصغر کے سروں پر کے مماسوں سے بنتا ہے۔



مستطیل کے وتروں پر کے قطروں کا مساوی ہونا منحنی کے تشاکل سے ظاہر ہے اور اُنکا مزدوج ہونا اِس واقعہ سے معلوم ہوتا ہے کہ اوپر کی شکل میں چونکہ ک ج ، اب کی تنصیف کرتا ہے جو ط طَ کے متوازی ہے اسلئے ج ک اور ج طَ مزدوج خطوط ہیں ۔

١٥٢ ب ۔ اگر ج ن اور ج د ، ایک قطع ناقص کے مزدوج نیم قطروں کا ایک زوج ہو تو

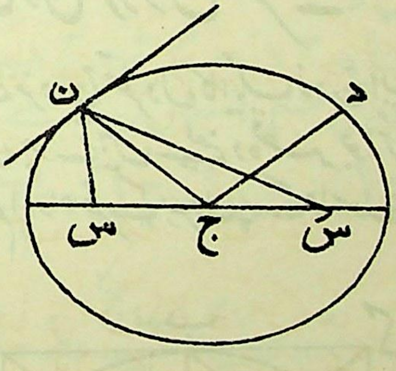
$$\text{س ن} \times \text{سَ ن} = \text{ج د}^{٢}$$

چونکہ س سَ کا وسطی نقطہ ج ہے اِس لئے (157)

$$٢\,\text{ج ن}^{٢} + ٢\,\text{ج س}^{٢} = \text{س ن}^{٢} + \text{سَ ن}^{٢}$$

$$= (\text{سَ ن} + \text{س ن})^{٢} - ٢\,\text{س ن} \times \text{سَ ن}$$

$$= ٤\,\text{ج ا}^{٢} - ٢\,\text{س ن} \times \text{سَ ن}$$



$$\therefore \text{س ن} \times \text{سَ ن} = ٢\,\text{ج ا}^{٢} - \text{ج ن}^{٢} - \text{ج س}^{٢}$$

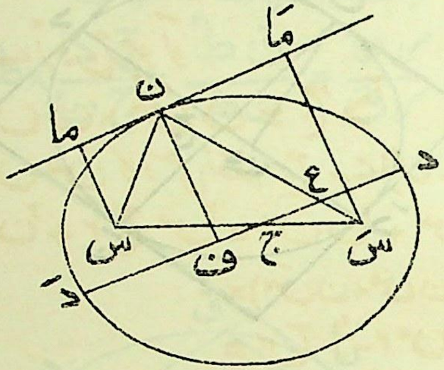
$$= \text{ج ا}^{٢} + \text{ج ب}^{٢} - \text{ج ن}^{٢}$$

$$= \text{ج د}^{٢}$$ (دفعہ ١٥٢ سے)

١٥٣ ۔ اگر ایک قطع ناقص پر ن کوئی نقطہ ہو اور ن پر کا

عماد، د ج دَ سے جو ج ن کے ساتھ مزدوج قطر ہے ف پر ملے تو ن ف × ج د = ا ج × ب ج

ن پر کا مماس کھینچو اور اس پر ماسکوں سے عمود س ما اور سَ مَا نکالو۔



س ن اور سَ ن کو مِلاؤ اور فرض کرو کہ سَ ن، د دَ کو ع پر قطع کرتا ہے۔

اب $\triangle^{ت}$ س ن ما، سَ ن مَا متشابہ ہیں۔

(158) ∴ س ما : س ن = سَ مَا : سَ ن

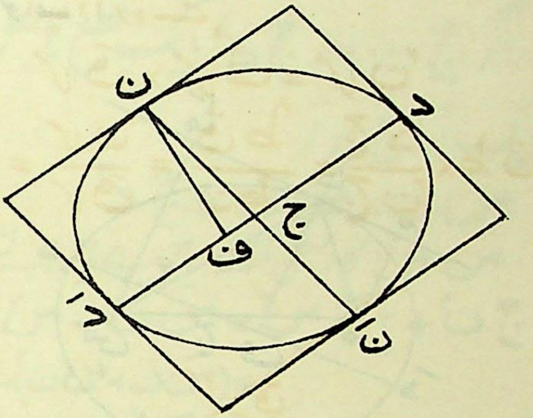
∴ س ما × سَ مَا : س ن × سَ ن = س ما^{۲} : س ن^{۲}

= ن ف^{۲} : ن ع^{۲} کیونکہ $\triangle^{ت}$ س ما ن، ن ف ع متشابہ ہیں۔

∴ ب ج^{۲} : ج د^{۲} = ن ف^{۲} : ا ج^{۲}

یعنی ن ف × ج د = ا ج × ب ج

نتیجۂ صریح ۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سِروں پر مماس کھینچنے سے بنتا ہے مستقل اور ۴ ا ج × ب ج کے مساوی ہوتا ہے۔



کیونکہ رقبہ = ۴ × متوازی الاضلاع ن دَ کا رقبہ
= ۴ ن ف × ج د = ۴ ا ج × ب ج

دائرہ انحناء

۱۵۴ ۔ مسئلہ ۔ قطع ناقص کے کسی نقطہ ن پر کے دائرہ انحناء کا وہ وتر جو قطع ناقص کے مرکز میں سے گذرتا ہے

$$\frac{۲\,\text{ج دَ}^{۲}}{\text{ج ن}}$$

کے مساوی ہوتا ہے ۔

فرض کرو کہ ق، قطع ناقص پر ن سے قریب ایک نقطہ ہے

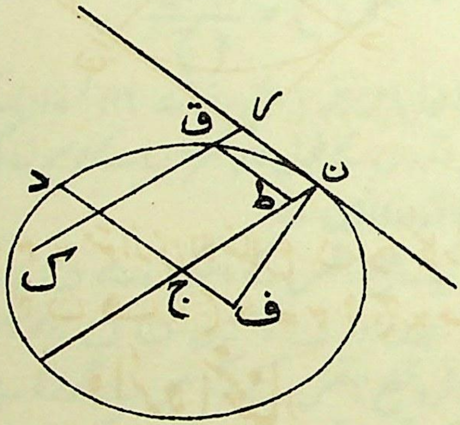
اور قطر ن ج نَ کا معین ق ط ہے۔

اُس دائرہ کا تصور کرو جو قطع ناقص کو ن پر مس کرتا ہے اور ق پر قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ اس دائرہ کا وتر ق ک، ج ن کے متوازی ہے۔ فرض کرو کہ وتر ق ک، ن پر کے مماس سے ر پر ملتا ہے۔ (159)

اب دائرہ سے

$$\text{ر ق} \times \text{ر ک} = \text{ر ن}^2$$

$$\therefore \text{ر ک} = \frac{\text{ر ن}^2}{\text{ر ق}} = \frac{\text{ق ط}^2}{\text{ن ط}} = \frac{\text{ج د}^2}{\text{ج ن}^2} \times \text{ط نَ} \quad (\text{دفعہ ۱۴۷})$$



پس چونکہ دائرہ انحناء کا وہ وتر جو مرکز میں سے گذرتا ہے ر ک کی انتہا ہے جبکہ ق، ن سے قریب آئے اس لئے وہ

$$= \frac{\text{ج د}^2}{\text{ج ن}^2} \times \text{انتہا ط نَ}$$

$$= \frac{\text{ج د}^2}{\text{ج ن}^2} \times \text{۲ ج ن} = \frac{\text{۲ ج د}^2}{\text{ج ن}}$$

نتیجۂ صریح ۔ دائرہ انحناء کا قطر $= \frac{\text{۲ ج د}^2}{\text{ن ف}}$ جہاں

ف وہ نقطہ ہے جس پر عماد، ج د سے ملتا ہے۔ کیونکہ

$$\text{قطر}: \frac{2\,\text{ج د}^2}{\text{ج ن}} = \text{قط (عماد اور ج ن کے درمیان زاویہ)}$$

$$= \text{ج ن} : \text{ن ف}$$

$$\therefore \text{قطر} = \frac{2\,\text{ج د}^2}{\text{ن ف}} = \frac{2\,\text{ج د}^3}{\text{ا ج} \times \text{ب ج}}$$

* * *

(160)

مثالیں

۱ — اس باب میں استعمال کی ہوئی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ

$$\text{ج س : ج ٹ} = \text{ج س}^{2} : \text{ج ا}^{2}$$

۲ — اگر ایک قطع ناقص کا نیم وتر خاص س خ ہو تو س خ = ز × س ٹ۔ اِس لئے ثابت کرو کہ

$$\text{س خ} = \frac{\text{ب ج}^{2}}{\text{ا ج}}$$

وتر خاص کا طول اِس نتیجہ (دیکھو دفعات ۱۱۶، ۱۱۷) کے استعمال سے بھی معلوم کرو کہ دو ماسکی وتروں کے طول اُن قطروں کے مربعوں کی نسبت میں ہوتے ہیں جو وتروں کے متوازی ہیں۔

۳ — اگر ایک قطع ناقص کے ماسکوں سے ن پر کے مماس پر عمودوں کے پائین ما، ے ہوں اور ن کا معین ن ل ہو تو ثابت کرو کہ مال ے کو حائط کرنیوالا دائرہ قطع ناقص کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۴ — اگر ایک قطع ناقص پر جس کے ماسکے س اور سَ ہیں کوئی نقطہ ن ہو تو س ن سَ کو حائط کرنے والا دائرہ محور اصغر کو اُن نقطوں پر قطع کریگا جہاں ن پر کے مماس اور عماد اس سے ملتے ہیں۔

۵ — اگر دو دائرے داخلاً مس کریں تو اِن دونوں کو مس کرنے والے دائروں کے مرکزوں کا طریق ایک قطع ناقص ہے جس کے ماسکے دئے ہوئے دائروں کے مرکز ہیں۔

۶ — اگر ایک قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا مماس محور اعظم سے ت پر ملے اور ل گ زیر عماد ہو تو

$$\text{ج ت} \times \text{ل گ} = \text{ب ج}^{2}$$

۷۔ اگر ایک قطع ناقص کے کسی نقطہ ن کا معین ن ل ہو اور اگر ن پر کے مماس پر ماسکوں سے عمودوں کے پائین ما، مَا ہوں تو ن ل زاویہ مال مَا کی تنصیف کریگا۔

۸۔ اگر ایک قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد محور اصغر سے گ پر ملے اور ن پر کا مماس راس ا پر کے مماس سے ط پر ملے تو ثابت کرو کہ
س گ : س ج = ن ط : ط ا

۹۔ اگر ن پر کا عماد محور اعظم سے گ پر ملے تو ماسکوں سے ن پر کے مماس پر عمودوں کے درمیان اوسط موسیقی ن گ ہوگا۔

۱۰۔ اگر ایک قطع ناقص ایک مثلث کے اندر بنایا جائے اور اسکا ایک ماسکہ مثلث کے مرکز عمودی پر ہو تو دوسرا ماسکہ حائط مرکز پر ہوگا۔

۱۱۔ اگر ایک قطع ناقص دو علی القوائم خطوط مستقیم کے درمیان پھسلے تو اِس کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔

۱۲۔ ایک قطع ناقص کے ایک ماسکہ میں سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو قطع ناقص کے مماسوں سے ایک مستقل زاویہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن نقطوں کا طریق جن پر وہ مماسوں سے ملتے ہیں ایک دائرہ ہے۔

۱۳۔ ایک متغیر مثلث کے راس ایک ثابت قطع ناقص کے ماسکے اور اِس پر کا کوئی نقطہ ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے اندرونی مرکز کا طریق ایک قطع ناقص ہے

۱۴۔ ایک قطع ناقص کے گرد ایک ذو اربعۃ الاضلاع کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس کے مقابل کے اضلاع کسی ایک ماسکہ پر تکمیلی زاوئے بناتے ہیں۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ ایک قطع ناقص کے ماسکے اور وہ نقطے جن پر قطع ناقص کا کوئی مماس راسوں پر کے مماسوں سے ملتا ہے ہم دائری ہوتے ہیں۔

۱۶۔ اگر ایک قطع ناقص کا ایک نیم قطر ج ق ہو جو اُس وتر کا مزدوج ہے جو منحنی کے ایک نقطہ ن پر کا عماد ہے تو ثابت کرو کہ ج ن، ق پر کے عماد کا مزدوج ہے۔

۱۷۔ اگر ایک قطع ناقص پر جس کے ماسکے س اور سَ ہیں اور جسکا

ایک راس ا ہے ن کوئی نقطہ ہو تو زاویوں ن س ا، ن سَ ا کے ناصف ن پر کے مماس پر ملینگے۔

۱۸ — ایک قطع ناقص میں جس کے ماسکے س اور سَ ہیں اور جسکا مرکز ج ہے گ ل، ج ن پر عمود کھینچا گیا ہے اور ج م، سَ ن کے متوازی کھینچا گیا ہے جو ن گ سے م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلثات ج ل م، ج م ن متشابہ ہیں۔

۱۹ — ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک ناقص کو دو نقطوں پر مس کرتا ہے۔ قطع ناقص پر کوئی نقطہ ق ہے۔ اگر ق سے دائرہ کا ایک مماس ق ت ہو اور ق ل، مشترک وتر پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ

ق ت = ز × ق ل

۲۰ — اگر ایک قطع مکافی کا ماسکہ ایک قطع ناقص کے ایک ماسکہ پر منطبق ہو اور قطع مکافی اس کے محور اصغر کو مس کرے تو قطع ناقص اور قطع مکافی کے ایک مشترک مماس کے محاذی ماسکہ پر ایک قائمہ زاویہ بنیگا۔

۲۱ — بتاؤ کہ ایک قطع ناقص کے محوروں کی مقدار اور انکا محل کس طرح متعین کئے جا سکتے ہیں جبکہ دو مزدوج قطر مقدار اور محل میں دئے گئے ہوں۔

۲۲ — ایک قطع ناقص بناؤ جبکہ اس کے مرکز کا محل اور ایک خود مزدوج مثلث دیا گیا ہو۔

۲۳ — اگر ایک قطع ناقص پر جسکے راس ا اور اَ ہیں ن کوئی نقطہ ہو اور ا ن، اَ ن ایک مرتب سے نقطوں ع اور ف پر ملیں تو ع ف کے محاذی نظیری ماسکہ پر ایک قائمہ زاویہ بنیگا۔

۲۴ — مثال ۲۳ سے یہ خاصیت اخذ کرو کہ ن ل^{۲} : ا ل × ل اَ مستقل ہوتا ہے۔

۲۵ — ثابت کرو کہ وہ وتر جو ایک قطع ناقص پر کے کسی نقطہ کو ایک قطر کے سروں سے ملاتے ہیں مزدوج قطروں کے ایک زوج کے متوازی ہوتے ہیں۔

[ایسے دو وتروں کو تکمیلی وتر کہتے ہیں]

۲۶ — اگر ایک دائرہ ایک ثابت قطع ناقص کو ن پر مس کرے اور اس کو ایک قطر ق قَ کے سروں پر قطع کرے تو ن ق اور ن قَ کی سمتیں مستقل ہونگی ۔

۲۷ — قطعات ناقص کے ایک نظام میں تمام ناقص ایک مشترک ثابت ماسکہ رکھتے ہیں اور دو ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ اِن کے مرتب دائرے ہم محور ہیں ۔

۲۸ — ایک قطع ناقص کے ماسکہ س سے ایک مماس پر عمود س ما ہے اور س ما ممدودہ میں ایک نقطہ ک ایسا ہے کہ س ما = ما ک ۔ ثابت کرو کہ ک سے مرتب دائرہ کے مماس کا مربع س ما کے مربع کا دو چند ہے ۔

۲۹ — ایک قطع ناقص کے مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے ایک سِرے پر کا دائرہ انحناء قطع ناقص سے مکرر اُسی قطر کے سِرے پر ملتا ہے ۔

۳۰ — اگر ایک قطع ناقص کے نقطہ ن کا معیّن ن ل ہو تو سمت

$$\text{ن ل میں وتر انحناء} = \frac{\text{۲ ج د}'^{\,۲}}{\text{ب ج}^{۲}} \times \text{ن ل}$$

۳۱ — اگر ایک قطع ناقص کے ماسکے س اور سَ ہوں اور محور اصغر کا ایک سِرا ب ہو تو دائرہ س سَ ب، محور اصغر کو ب پر کے مرکز انحناء پر قطع کریگا ۔

۳۲ — ایک قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا دائرہ انحناء ماسکہ س میں سے گذرتا ہے اور س ع، ن پر کے مماس کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ ن میں سے گذرنیوالے قطر سے ع پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ اس قطر کو نسبت ۳ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے ۔

۳۳ — ایک قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا دائرہ انحناء منحنی کو مکرر ق پر قطع کرتا ہے ۔ ن پر کا مماس دوسرے مشترک مماس سے و پر ملتا ہے اور یہ دوسرا مشترک مماس قطع ناقص اور دائرہ کو ع اور ف پر مس کرتا ہے

ثابت کرو کہ (ت و، ع ف) = -۱

۳۴ — ایک قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا مماس مساوی مزدوجوں سے ق اور ق′ پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ج ن، مثلث ق ج ق′ کا شبہ وسطی ہے ۔

تیرہواں باب

قطع زائد

۱۵۵ — ہم دفعات ۱۰۰ اور ۱۰۱ میں دیکھ چکے ہیں کہ قطع زائد ایک ایسے دائرہ کا ظل ہے جو خط منعدم سے منقطع ہوتا ہے۔ نیز یہ کہ قطع زائد میں تشاکل کے دو محور ہوتے ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوتے ہیں اور جن میں سے ایک جسے قاطع محور کہتے ہیں منحنی سے راسوں ا اور اَ پر ملتا ہے اور دوسرا جسے مزدوج محور کہتے ہیں منحنی سے نہیں ملتا۔ یہ دو محور منحنی کے مرکز ج پر ملتے ہیں اور ج سے منحنی کے دو مماس ہوتے ہیں جن کے نقاط تماس لاتناہی پر ہوتے ہیں۔

اِن مماسوں کو **متقارب** کہا جاتا ہے اور وہ محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

منحنی دو ماسکے س اور سَ رکھتا ہے جو قاطع محور کے خط پر واقع ہوتے ہیں اور اگر اِن سے متقاربوں پر عمود کھینچے جائیں تو اِن عمودوں کے پایین اُس دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جو ا اَ کو قطر مانکر کھینچا گیا ہو۔ مرتب جو ماسکوں کے قطبی خط ہیں قاطع محور پر علی القوائم ہوتے ہیں اور متذکرہ بالا عمودوں کے پایین میں سے گذرتے ہیں۔ اگر لا اور لاَ وہ نقطے ہوں جنپر مرتب قاطع محور کو قطع کرتے ہیں اور منحنی کا مرکز ج ہو تو

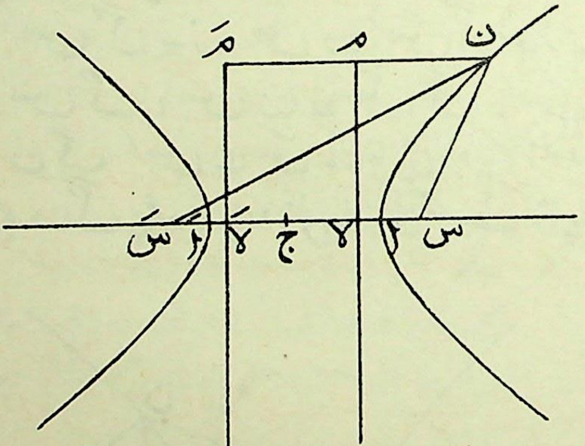
خروج المرکز (ز) = ج س : ج ا = ج ا : ج لا

۱۵۶ — اس باب میں ہم وہ اہم خواص بیان کرینگے جو سب قطعات زائد میں مشترک ہوتے ہیں — ان میں سے بعض وہی خواص ہیں جو قطع ناقص کے ہیں اور بڑی حد تک اسی طرح ثابت کئے جا سکتے ہیں — لیکن یہ واقعہ کہ قطع زائد متقاربوں کا ایک زوج یعنے وہ مماس رکھتا ہے جن کے نقاط تماس لاتناہی پر ہیں منحنی کو ایک امتیازی حیثیت بخشتا ہے —

(164)

۱۵۷ — ماسکی فاصلوں کا فرق مستقل —

مسئلہ — قطع زائد کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا فرق مستقل اور قاطع محور کے طول ا اَ کے مساوی ہوتا ہے —



فرض کرو کہ قطع زائد پر کوئی نقطہ ن ہے —
ن م مَ حسب شکل مرتبوں پر عمود کھینچو — اب
سَ ن = ز × ن مَ اور س ن = ز × ن م
∴ سَ ن ~ س ن = ز × لا لاَ = ا اَ

ایک شاخ پر کے نقطوں کے لئے سَ ن - س ن = ا اَ
اور دوسری شاخ پر کے نقطوں کے لئے س ن - سَ ن = ا اَ -

نتیجہ صریح - دو ہم ماسکی قطعات زائد متقاطع نہیں ہوسکتے -

مماس اور عماد

۱۵۸ - مسئلہ - قطع زائد کے کسی نقطہ پر کے مماس اور عماد اِس نقطہ کے ماسکی نصف قطروں کے داخلی اور خارجی زاویونکو علی الترتیب تنصیف کرتے ہیں -

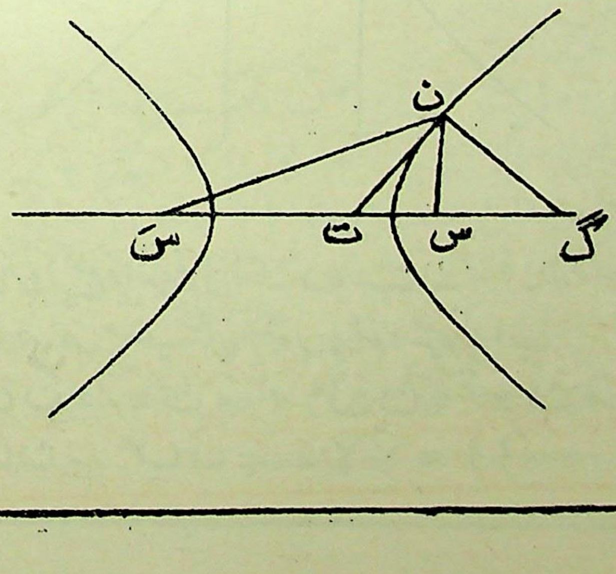
فرض کرو کہ ن پر کے مماس اور عماد قاطع محور سے ت اور گ پر ملتے ہیں
اب دفعہ ۱۱۱ کی رو سے

س گ = ز × س ن ، سَ گ = ز × سَ ن

∴ س گ : س ن = سَ گ : سَ ن

∴ ن گ ، س ن سَ کے خارجی زاویہ کا ناصف ہے اور اسلئے ن ت کو جو ن گ پر عمود ہے داخلی زاویہ کی تنصیف کرنا چاہئے -

(165)



نتیجہ صریح ۱ ۔ ج گ × ج ت = ج س^۲ کیونکہ (س سَ، ت گ) = -۱

نتیجہ صریح ۲ ۔ اگر ایک قطع زائد اور قطع ناقص ہم ماسکی ہوں تو ان کے نقاط تقاطع پر ان کے مماس علی القوائم ہوتے ہیں یعنی بالفاظِ دیگر یہ منحنی علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں ۔

۱۵۹ ۔ مسئلہ ۔ اگر ایک قطع زائد کے ماسکوں سے اس کے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر عمود س ما اور سَ مَا ہوں تو ما اور مَا اس دائرہ پر واقع ہونگے جو ا اَ پر اسے قطر مانکر کھینچا گیا ہو اور س ما × سَ مَا مستقل ہوگا ۔ اس دائرہ کو امدادی دائرہ کہتے ہیں ۔

فرض کرو کہ س ما، سَ ن سے ک پر ملتا ہے ۔

اب چونکہ ∠ س ن ما = ∠ ک ن ما (دفعہ ۱۵۸)

اور ∠ س ما ن = ∠ ک ما ن

اور ن ما مشترک ہے

∴ △ س ن ما ≡ △ ک ن ما

اور س ما = ما ک، ن ک = س ن

نیز چونکہ س ک اور س سَ کے وسطی نقطے ما اور ج ہیں

اس لئے ج ما، سَ ک کے متوازی ہے اور

ج ما = ½ سَ ک = ½ (سَ ن - ک ن)

= ½ (سَ ن - س ن) = ½ ا اَ = ج ا

پس ما (اور اسی طرح مَا) ا اَ پر کے دائرہ پر واقع ہے ۔

اگر سَ مَا دائرہ سے مکرر ے پر ملے تو چونکہ ما مَا ے ایک

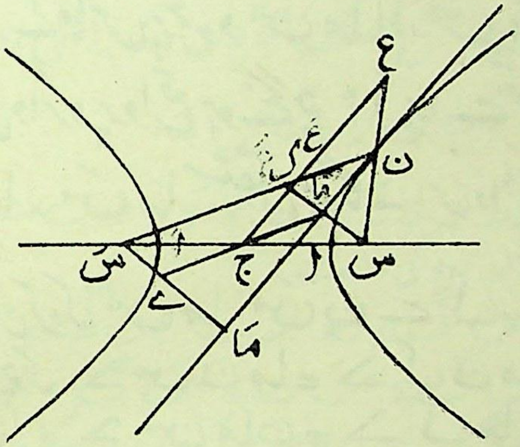
زاویہ قائمہ ہے اِس لئے ما ے ایک قطر ہونا چاہئے اور ج میں سے گذرنا چاہئے۔

نیز ∆ س ج ما ≡ ∆ سَ ج ے اور سَ ے = س ما

∴ س ما × سَ مَا = سَ ے × س مَا = سَ اَ × س ا

= ج س^{۲} ـ ج ا^{۲}

جو مستقل ہے۔



نتیجۂ صریح ۱ ـ وہ قطر جو ن پر کے مماس کے متوازی ہے، س ن اور سَ ن سے ایسے نقاط ع اور عَ پر ملیگا کہ ن ع = ن عَ = ج ا

نتیجۂ صریح ۲ ـ اگر ایک ثابت نقطہ س سے ایک خط پر عمود کھینچا جائے اور اِس عمود کا پائین ایک ثابت دائرہ پر واقع ہو تو اِس خط کا لفاف ایک قطع زائد ہوتا ہے جسکا ایک ماسکہ س ہے بشرطیکہ نقطہ س اِس دائرہ کے باہر واقع ہو۔

نتیجۂ صریح ۳ — اگر دو ثابت نقطوں سے ایک خط پر ڈالے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو تو اِس خط کا لفاف ایک قطع زائد ہوتا ہے جس کے ماسکے یہ ثابت نقطے ہیں بشرطیکہ یہ نقطے خط کی مخالف سمتوں میں ہوں۔

دفعہ ۱۴۱ کے نتائج صریح ۲ اور ۳ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

۱۶۰ — مزدوج محور کا طول۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ قطع زائد کا مزدوج محور منحنی سے نہیں ملتا، اِس لئے ہم نہیں کہہ سکتے کہ وہ اُنہی معنوں میں طول رکھتا ہے جن معنوں میں قطع ناقص کا محور اصغر اپنے طول کے لئے وہ حصہ رکھتا ہے جو منحنی سے منقطع ہوتا ہے۔

جیسا کہ آئندہ چلکر معلوم ہوگا سہولت اس میں ہے کہ مزدوج محور پر یہ طول ب بَ ایسا ناپ لیا جائے کہ ب اور بَ، ج سے مساوی (167)
فاصلہ پر ہوں اور

$$\text{ب ج}^{2} = \text{ج س}^{2} - \text{ج ا}^{2} = \text{ا س} \times \text{اَ س}$$

اس سے س ما × سَ مَا (دیکھو مسئلہ ماسبق) ب ج^{2} کے مساوی ہوگا (دفعہ ۱۴۱ کے ساتھ مقابلہ کرو)۔

طول ب بَ کو ہم بہ نظر سہولت مزدوج محور کا طول کہینگے لیکن یہ صاف طور پر ذہن نشیں رہے کہ ب بَ، قطع زائد کا کوئی قطری طول نہیں ہے کیونکہ ب اور بَ منحنی پر واقع نہیں ہیں۔

۱۶۱ — یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہوگا کہ اگر ایک مستطیل کھینچا جائے جس کے مقابل کے ضلعوں کا ایک زوج، ا اور اَ پر کے مماسوں کا ہو اور جسکے وتر متقاربوں پر ہوں تو مزدوج محور کا وہ حصہ جو اس مستطیل میں منقطع ہوتا ہے طول ب بَ کا ہوگا جسکو ہم نے حسب صراحت بالا

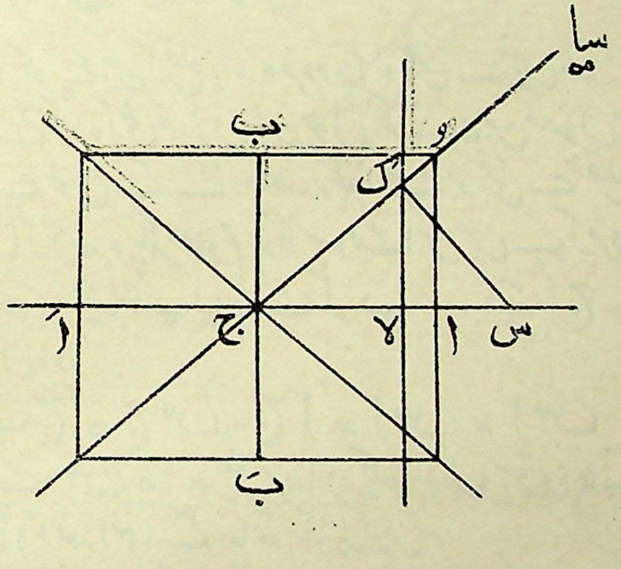
نشان زد کیا ہے ۔

کیونکہ اگر ا پر کا مماس متقارب ج سا سے و پر ملے اور س کے جواب میں جو مرتب ہے وہ ج سا سے ک پر ملے تو چونکہ ج ک س ایک قائمہ زاویہ ہے اور ج ک = ج ا (دفعہ ۱۰۱) اس لئے

△ ج ک س ≡ △ ج ا و

پس

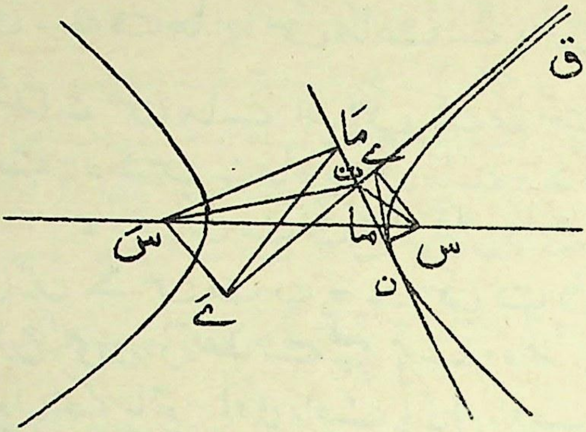
ا و^2 = س ک^2 = ج س^2 - ج ک^2 = ج س^2 - ج ا^2



مماسوں کا زوج

(168)

۱۶۲ — مسئلہ ۔ اگر ایک نقطہ سے قطع زائد کے دو مماس کھینچے جائیں تو یہ مماس اِس نقطہ کے ماسکی فاصلوں کے ساتھ مساوی یا تکمیلی زاوے بناتے ہیں ۔



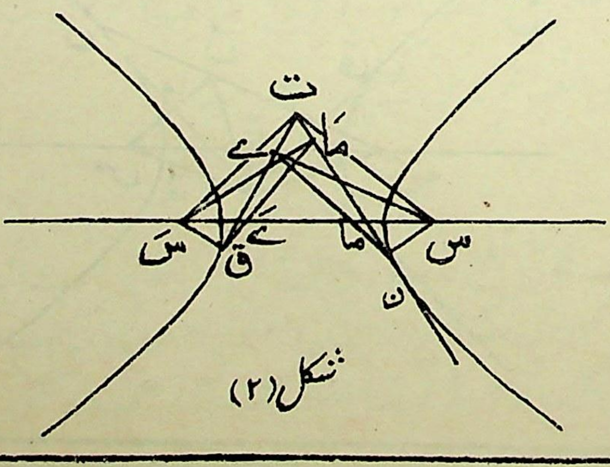
شکل (۱)

فرض کرو کہ مماس ت ن، ت ق ہیں، یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ زاویے س ت ن اور سَ ت ق مساوی یا تکمیلی ہیں۔ ت ن پر عمود س ما، سَ مَا اور ت ق پر عمود س ے سَ ےَ کھینچو۔

اب س ما × سَ مَا = ب ج^{2} = س ے × سَ ےَ

∴ س ما : س ے = سَ ےَ : سَ مَا

نیز ∠ ما س ے = ∠ ےَ سَ مَا کیونکہ یہ زاویے شکل (۱) میں مساوی زاویوں ے ت ما اور ےَ ت مَا کے تکملے ہیں اور شکل (۲) میں ان میں سے ہر ایک زاویہ ما ت ے کے مساوی



شکل (۲)

(169) ہے کیونکہ س ے ت ما اور سَ مَا ت ے دائری ہیں۔

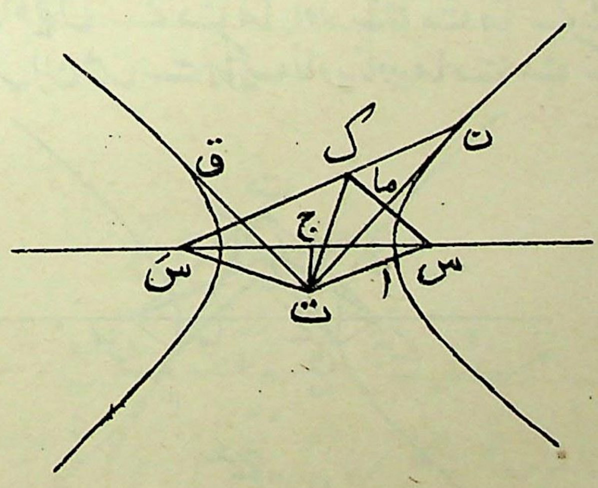
پس مثلثات س ما ے اور سَ ے مَا متشابہ ہیں اور
د س ت ان = د س ے ما = د سَ مَا ے = د سَ ت ے
= د سَ ت ق کا تکملہ شکل (۱) میں،
لیکن شکل (۲) میں د س ت ن = د سَ ت ق

اِس طرح کسی بیرونی نقطہ سے کھینچے ہوئے دو مماس اس نقطہ کے ماسکی فاصلوں کے ساتھ مساوی زاوئے یا تکمیلی زاوئے بناتے ہیں بموجب اس کے کہ مماس مختلف شاخوں سے یا ایک ہی شاخ سے متعلق ہوں۔

۱۶۳۔ مرتب دائرہ۔

مسئلہ۔ اُن نقطوں کا طریق جن سے قطع زائد کے دو مماس علی القوائم ہوں ایک دائرہ ہوتا ہے جسے قطع زائد کا مرتب دائرہ کہتے ہیں

فرض کرو کہ دو مماس ت ن اور ت ق علی القوائم ہیں۔
ت ن پر عمود س ما کھینچو اور فرض کرو کہ وہ سَ ن سے ک پر ملتا ہے۔



اب دفعہ ۱۵۹ کی رو سے س ما = ماک اور سَ ک = ااَ

نیز △ س مات ≡ ک مات

پس س ت = ک ت اور ∠ ک ت ما = ∠ س ت ما

= ∠ ق ت سَ (دفعہ ۱۶۲)

∴ ∠ ک ت سَ = ∠ ن ت ق = ایک زاویہ قائمہ

(170) اب ۲ ج ت^{۲} + ۲ ج س^{۲} = س ت^{۲} + سَ ت^{۲} (دفعہ ۱۰)

= ک ت^{۲} + سَ ت^{۲}

= ک سَ^{۲} = ااَ^{۲} = ۴ ج ا^{۲}

∴ ج ت^{۲} = ۲ ج ا^{۲} − ج س^{۲}

= ج ا^{۲} − (ج س^{۲} − ج ا^{۲})

= ج ا^{۲} − ج ب^{۲}

پس ت کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے اور جس کے نصف قطر کا مربع ج ا^{۲} − ج ب^{۲} ہے (دفعہ ۱۴۵ کے ساتھ مقابلہ کرو)۔

نتیجہ صریح ۱ – اگر ج ا = ج ب تو ج ت = ۰ یعنی ج سے کھینچے ہوئے مماس یعنے متقارب علی القوائم ہیں۔

نتیجہ صریح ۲ – اگر ج ا < ج ب تو کوئی نقطے ایسے نہیں ہیں جن سے علی القوائم مماس کھینچے جا سکیں۔

مزدوج قطع زائد

۱۶۴ – کوئی قطع زائد پوری طرح متعین ہو جاتا ہے اگر اسکے قاطع اور مزدوج محوروں کے طول اور محل معلوم ہوں کیونکہ جب ااَ اور ب بَ مقررہ ہوتے ہیں تو خط ااَ پر ما سے س اور سَ رشتہ

ج س^2 = ج س′^{2} = ج ا^2 + ج ب^2

سے معلوم ہوتے ہیں۔

نیز خروج المرکز ز = ج س : ج ا اور مرتب چونکہ وہ خطوط ہیں جو ا ا′ پر عمود ہیں اور اِس پر کے ایسے نقطوں ٧ اور ٧′ میں سے گذرتے ہیں کہ

ج ا : ج ٧ = ز = ج ا′ : ج ٧

اس لئے وہ بھی معلوم ہو جاتے ہیں۔

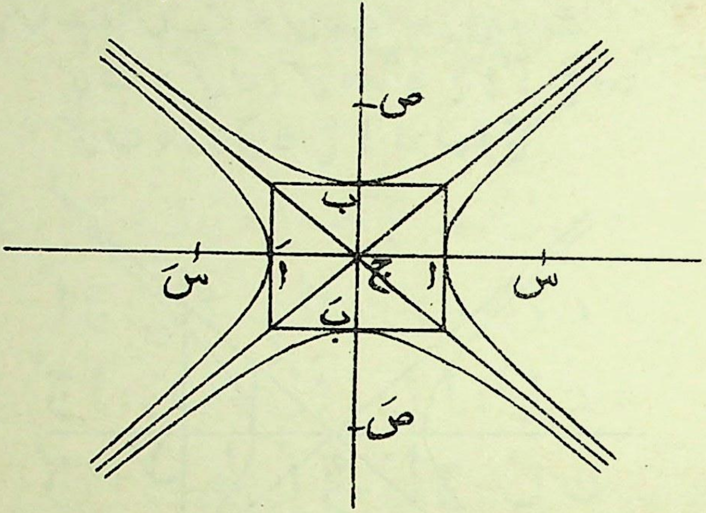
۱۶۵ — اب ہم ایک نیا قطع زائد لیتے ہیں جس کے قاطع اور مزدوج محور علی الترتیب ابتدائی قطع زائد کے مزدوج اور قاطع محور ہیں۔ اِس نئے قطع زائد کے متقارب صریحاً وہی ہونگے جو ابتدائی قطع زائد کے ہیں (دفعہ ۱۶۱) اور یہ نیا قطع زائد اُس فضا میں واقع ہوگا جو اِن متقاربوں کے درمیان ان کے خارجی زاویے سے محدود ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اِس نئے قطع زائد کو ابتدائی قطع زائد کے لحاظ سے **مزدوج قطع زائد** کہتے ہیں اور ظاہر ہے کہ ابتدائی قطع زائد اِس نئے قطع زائد کا مزدوج قطع زائد ہوگا۔

قطع زائد اور اِس کا مزدوج دو جدا جدا منحنی ہیں، ہر ایک اپنے اپنے ماسکے اور مرتب رکھتا ہے اور بالعموم انکے خروج المرکز بھی مختلف ہوتے ہیں۔ ابتدائی قطع زائد کے ماسکے س اور س′ ا ا′ کے خط پر واقع ہیں اور یہ نقطے ایسے ہیں کہ ج س^2 = ج ا^2 + ج ب^2 اور اسکا خروج المرکز ج س : ج ا ہے۔ مزدوج قطع زائد کے ماسکے ص اور ص′ ب ب′ کے خط پر واقع ہیں اور یہ نقطے ایسے ہیں کہ ج ص^2 = ج ا^2 + ج ب^2 اس طرح ج ص = ج س لیکن خروج المرکز ج ص : ج ب ہے جو ابتدائی قطع زائد کے خروج المرکز کے مساوی ہوگا اگر

ج ا = ج ب

اس خاص صورت میں متقارب ایک مربع کے وتر ہوتے ہیں (دفعہ ۱۶۱) اور اس لئے وہ ایک دوسرے کے علی القوائم ہوتے ہیں۔



جب متقارب ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو قطع زائد کو قائم کہا جاتا ہے۔ آئندہ باب میں ہم قائم قطع زائد کی امتیازی خاصیتوں کی تحقیقات کرینگے۔

ہم دیکھینگے کہ مزدوج قطع زائد کا ایک بہت ہی مفید متعلقہ ہے اور آئندہ اسکا استعمال کثرت سے کیا جائیگا۔

متقاربی خواص

۱۶۶ - مسئلہ - اگر ایک قطع زائد کے ایک متقارب پر کوئی نقطہ ر ہو اور ر ل جو قاطع محور پر عمود ہے قطع زائد سے ن اور ن' پر ملے تو ر ن × ر ن' = ب ج^{۲}

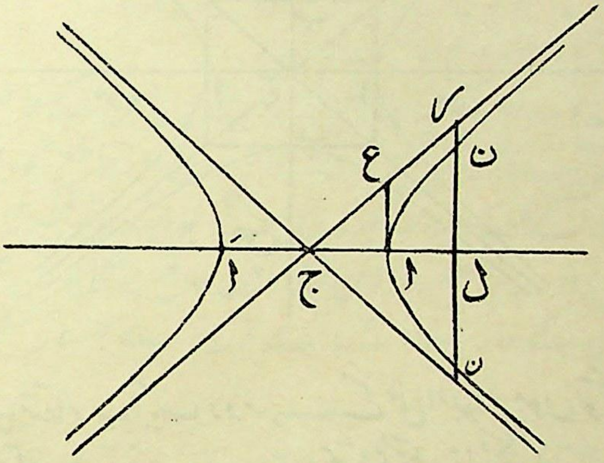
(172) فرض کرو کہ ا پر کا مماس اُس متقارب سے جس پر ر واقع ہے

ع پر ملتا ہے۔

اب چونکہ سا وہ نقطہ تماس ہے جہاں متقارب منحنی کو لاتناہی پرمس کرتا ہے اِس لئے نیوٹن کے مسئلہ کی رو سے

ر ن × ر ن : ر سا^2 = ع ا^2 : ع سا^2

∴ ر ن × ر ن = ع ا^2 = ب ج^2



اسکو شکل ذیل میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ر ل^2 - ن ل^2 = ب ج^2

ابھی یہ معلوم ہوگا کہ یہ مسئلہ ایک زیادہ عام مسئلہ کی صرف ایک خاص صورت ہے۔

۱۶۷ - مسئلہ - اگر ایک قطع زائد کے کسی نقطہ ن کا معین قاطع محور پر ن ل ہو تو

ن ل^2 : ا ل × اَ ل = ب ج^2 : ا ج^2

دفعہ ۱۶۶ کی شکل استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

ر ل^{۲} - ن ل^{۲} = ب ج^{۲}

∴ ن ل^{۲} = ر ل^{۲} - ب ج^{۲}

لیکن ر ل^{۲} : ب ج^{۲} = ر ل^{۲} : ع ا^{۲}

= ج ل^{۲} : ج ا^{۲}

∴ ر ل^{۲} - ب ج^{۲} : ب ج^{۲} = ج ل^{۲} - ج ا^{۲} : ج ا^{۲}

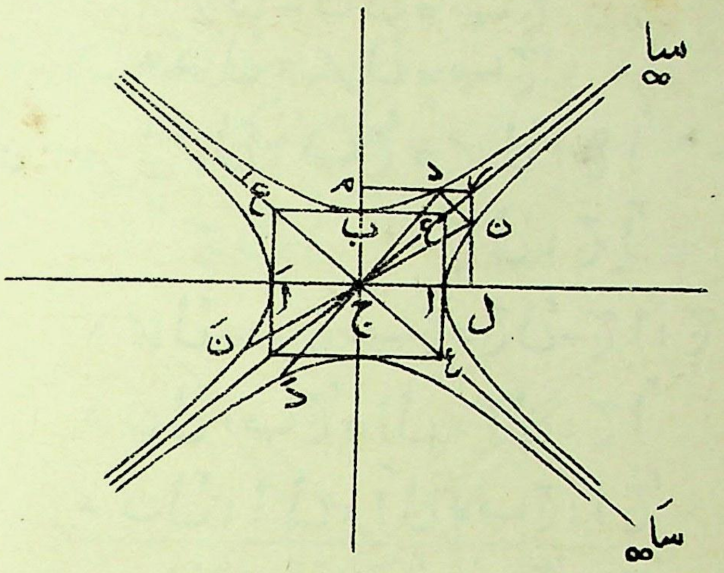
∴ ن ل^{۲} : ب ج^{۲} = ا ل × اَ ل : ج ا^{۲}

∴ ن ل^{۲} : ا ل × اَ ل = ب ج^{۲} : ا ج^{۲}

یا ن ل^{۲} : ج ل^{۲} - ج ا^{۲} = ب ج^{۲} : ا ج^{۲} (173)

یہ مسئلہ بھی ایک زیادہ عام مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے۔ اس خاصیت کا مقابلہ قطع ناقص کی متناظر خاصیت کے ساتھ (دفعہ ۱۴۸) کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ قطع زائد کے لئے اس خاصیت کا اُسی طرح ثابت کرنا ناممکن تھا جس طرح ہم نے قطع ناقص کے لئے کیا تھا، اس کی وجہ یہ ہے کہ مزدوج محور قطع زائد سے نہیں ملتا۔

۱۶۸ - مسئلہ - اگر ایک قطع زائد کے ایک متقارب میں کوئی نقطہ ر ہو اور اس نقطہ سے قاطع اور مزدوج محوروں پر عمود ر ن ل اور ر د م کھینچے جائیں جو قطع زائد اور اس کے مزدوج کو علی الترتیب ن اور د پر قطع کریں تو ن د، دوسرے متقارب کے متوازی ہوگا اور ج ن اور ج د، قطع زائد اور اس کے مزدوج دونوں کیلئے مزدوج خطوط ہونگے۔



فرض کرو کہ قطع زائد اور اس کے متقاربوں کے نقاط تماس لاتناہی پر سا اور سَا ہیں۔

ہم اولاً دیکھتے ہیں کہ اب، ج سَا کے متوازی ہے۔ کیونکہ وہ خطوط کھینچے سے جو ا اور ب میں سے گزرتے ہیں اور محوروں پر عمود ہیں اور متقاربوں سے نقطوں ع، عَ، عً پر ملتے ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے (174)

ع ب : ب عَ = ع ا : ا ع

نیز م ل، اب کے متوازی ہے، کیونکہ

ج ا : ج ب = ج ا : ا ع = ج ل : ر ل

= ج ل : ج م

∴ ج ا : ج ل = ج ب : ج م

اب ر ل۲ - ن ل۲ = ب ج۲ }
اور ر م۲ - د م۲ = ا ج۲ } دفعہ ۱۶۶

∴ رل^{٢} − نل^{٢} : رم^{٢} − دم^{٢} = جم^{٢} : جل^{٢}

= رل^{٢} : رم^{٢}

∴ رل^{٢} : رم^{٢} = نل^{٢} : دم^{٢}

اس لئے ن د، م ل کے متوازی ہے اور اس لئے ج سَا کے متوازی ہے۔

اس لئے ج سا، ن د کی تنصیف نقطہ ت (فرض کرو) پر کریگا۔

اب د ن، ج سَا سے سا پر ملیگا اور

(د ن، ت سَا) = −١

∴ ج ن اور ج د اس درپیچ سے متعلق ہونگے جس کے دوہرے خطوط ج سا اور ج سَا ہیں۔

لیکن چونکہ ج سا اور ج سَا، ج سے قطع زائد اور اس کے مزدوج کے مماس ہیں اس لئے وہ اس درپیچ پنسل کے دوہرے خطوط ہیں جو ج میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے زوجوں سے بنتی ہے

∴ ج ن اور ج د، قطع زائد اور اس کے مزدوج دونوں کیلئے مزدوج خطوط ہیں۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ ن پر قطع زائد کا مماس، ج د کے متوازی ہے اور نقطہ د پر مزدوج قطع زائد کا مماس، ج ن کے متوازی ہے۔

١٦٩ - مزدوج قطر

اگر خطوط ن ج اور د ج (شکل دفعہ ١٦٨) قطع زائد اور اس کے مزدوج سے مکرر نقطوں نَ اور دَ پر ملیں تو ن ج نَ اور د ج دَ کو دونوں قطعات زائد کے لئے **مزدوج قطر** کہا جاتا ہے۔ لیکن یہ صاف طور پر ذہن نشین رہے کہ ن ج نَ، ابتدائی قطع زائد کا ایک قطر ہے اور د ج دَ

اس کا قطر نہیں ہے بلکہ وہ مزدوج قطع زائد کا قطر ہے۔ (175)

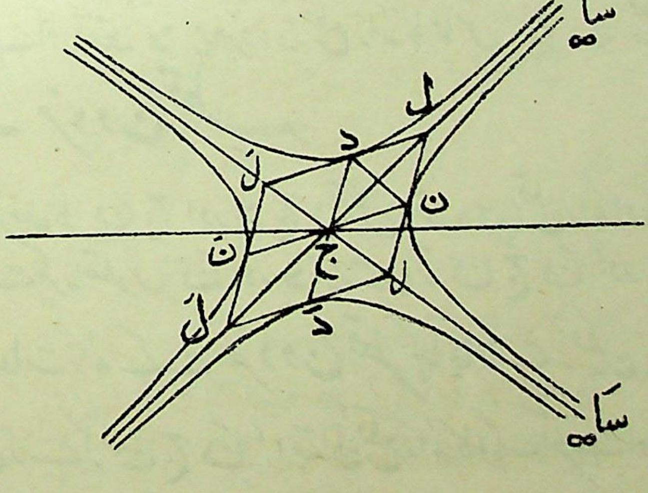
ہم نے جو یہاں مزدوج قطر کہا ہے تو اس کے یہ معنی ہیں کہ انمیں سے ایک، قطع زائد کا قطر ہے اور دوسرا، مزدوج قطع زائد کا۔

خط د ج دَ بھی ابتدائی قطع زائد کا ایک قطر اِن معنوں میں ہو سکتا ہے کہ وہ مرکز میں سے گذرنے والا ایک خط ہے اور وہ متوازی وتروں کے ایک نظام کی تنصیف کریگا لیکن وہ اِس لحاظ سے قطر نہیں ہے کہ وہ ایک ایسے طول کو تعبیر کرتا ہے جو اِس خط پر منحنی سے منقطع ہوتا ہے کیونکہ د اور دَ قطع زائد پر واقع نہیں ہیں۔ د ج دَ، قطع زائد سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا اگرچہ بلاشبہ وہ منحنی سے خیالی نقطوں پر یعنے ایسے نقطوں پر ملتا ہے جنکے محددوں میں خیالی مقدار $\sqrt{-1}$ شامل ہوتی ہے، وہ طالب علم جو علم ہندسہ تحلیلی سے واقف ہیں ایسے خیالی نقطوں کو خوب جانتے ہونگے۔

۱۷۰۔ مسئلہ۔ مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سروں پر کے مماس ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں جسکے وتر متقاربوں پر واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ن ج نَ اور د ج دَ حسب شکل مزدوج قطر ہیں۔

ہم قبل ازیں دفعہ ۱۶۸ میں ثابت کر چکے ہیں کہ ن د کی تنصیف ج سا سے ہوتی ہے۔



ن اور د پر کے مماس علی الترتیب ج د اور ج ن کے متوازی ہیں یہ مماس، ج ن اور ج د کے ساتھ ملکر ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں جس کا ایک وتر ج سا پر ہے۔

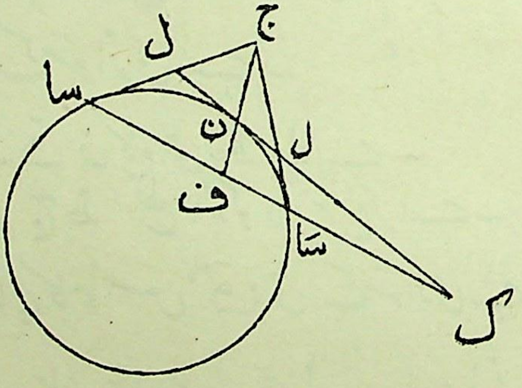
(176) اسی طرح نَ اور دَ پر کے مماس ج سا پر ملتے ہیں اور نَ، د اور ن، دَ پر کے مماس ج سَا پر ملتے ہیں۔

نتیجہ صریح ـــ کسی نقطہ پر کے مماس کا وہ حصہ جو متقاربوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے نقطہ تماس پر منصیف ہوتا ہے۔ کیونکہ

ل ن = دَ ج = ج د = ن ل

۱۷۱ ــ دفعہ ۱۷۰ کے نتیجہ صریح سے جس خاصیت کا اظہار ہوتا ہے وہ بلا واسطہ ایک دائرہ میں مظلل کرنے سے ثابت کیجا سکتی ہے اور ظل میں ہم بغیر کسی اُلجھاؤ کے وہی حروف استعمال کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ن پہ دائرہ کا مماس خط منعدم سا سَا سے ک پر ملتا ہے۔



ک کا قطبی ج میں سے گذرتا ہے کیونکہ ج کا قطبی ک میں سے گذرتا ہے، اور نیز ک کا قطبی ن میں سے گذرتا ہے۔

ج ن، ک کا قطبی ہے۔

فرض کروکہ ج ن، سا سَا سے ف پر ملتا ہے۔

∴ (ک ف، سا سَا) = -۱

∴ ج (ک ف، سا سَا) = -۱

∴ (ک ن، ل ل) = -۱

پس قطع زائد میں ل اور ل، نقطہ ن اور ل ل کے لاتناہی پرے کے نقطہ کے ساتھ موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔

∴ ل ن = ن ل

۱۷۲۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے ایک متقارب پر کے کسی نقطہ ر میں سے ایک خط کھینچا جائے جو قطع زائد کی ایک ہی شاخ کو نقطوں ق اور ق پر قطع کرے تو ر ق اور ر ق کا حاصل ضرب مزدوج قطع زائد کے اُس نیم قطر کے مساوی ہوگا جو ق ق کے متوازی ہے۔

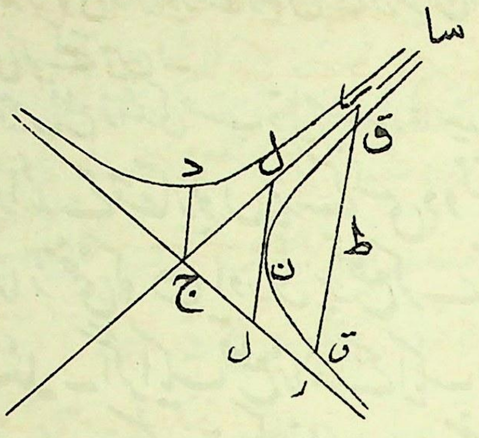
فرض کروکہ ق ق کا وسطی نقطہ ط ہے۔ (377)

فرض کروکہ ج ط، قطع زائد کو ن پر قطع کرتا ہے۔

اب ن پر کا مماس، ق ق کے متوازی ہے۔

فرض کروکہ یہ مماس متقاربوں سے ل اور ل پر ملتا ہے۔

فرض کروکہ ق ق کے متوازی مزدوج قطع زائد کا نیم قطر ج د ہے۔



نیوٹن کے مسئلہ کی رو سے

رَ ق × رَ ق : رَ سا^{۲} = ل ن^{۲} : ل سا^{۲}

∴ رَ ق × رَ ق = ل ن^{۲} = ج د^{۲}

اس لئے اگر خط رَ ق ق ہمیشہ ایک مستقل سمت میں کھینچا جائے تو مستطیل رَ ق × رَ ق، متقارب کے نقطہ رَ کے محل پر منحصر نہیں ہوگا۔ ہم اوپر کے رشتہ کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں

رَ ط^{۲} - ق ط^{۲} = ج د^{۲}

اور اگر رَ ق ق، دوسرے متقارب سے ر پر ملے تو

ر ط^{۲} - ق ط^{۲} = ج د^{۲}

∴ ر ط^{۲} - ق ط^{۲} = رَ ط^{۲} - ق ط^{۲}

∴ رَ ط = ط ر

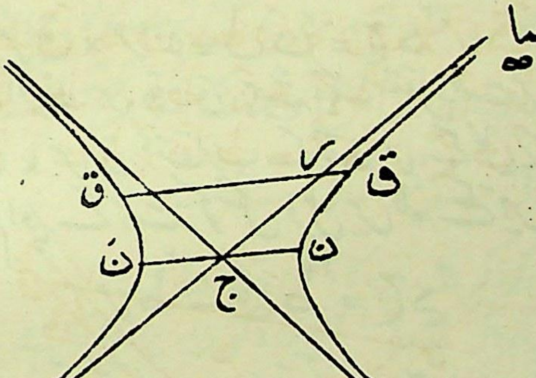
اور ∴ رَ ق = ق ر

پس قطع زائد کا کوئی وتر اور متقاربوں کے درمیان اس کے خط کا مقطوعہ ایک ہی نقطہ وسطی رکھتے ہیں۔

(178) اس طرح ہمیں قطع زائد کی حسب ذیل مشہور خاصیت ملتی ہے:۔

اگر قطع زائد کے متقاربوں پر کے کسی دو نقطوں ر اور ر کو ملانیوالا خط ر ر منحنی کو ق اور قَ پر قطع کرے تو ر ق = قَ ر

١٧٣۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے ایک متقارب پر کے کسی نقطہ ر میں سے ایک خط کھینچا جائے جو منحنی کی مخالف شاخوں سے ق اور قَ پر ملے تو ق ر × ر قَ = ج ن٢ جہاں ج ن، ق قَ کے متوازی قطع زائد کا نیم قطر ہے۔



کیونکہ نیوٹن کے مسئلہ سے

ر ق × ر قَ : ر سا٢ = ج ن × ج نَ : ج سا٢

∴ راق × راقَ = ـ ج ن^{۲}

∴ ق را × راقَ = ج ن^{۲}

دفعہ ماسبق کی طرح ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ قَ ق اور اس کا وہ حصہ جو متقاربوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے ایک ہی وسطی نقطہ رکھتے ہیں

۱۷۴ — مسئلہ — اگر قطر ن ج نَ کا ایک معیّن ق ط ہو اور ن نَ کا مزدوج قطر د ج دَ ہو تو

قط^{۲} : ن ط × نَ ط = ج د^{۲} : ج ن^{۲}

فرض کرو کہ ق ط، متقارب ج سا سے را پر ملتا ہے اور منحنی سے مکرر قَ پر ملتا ہے۔

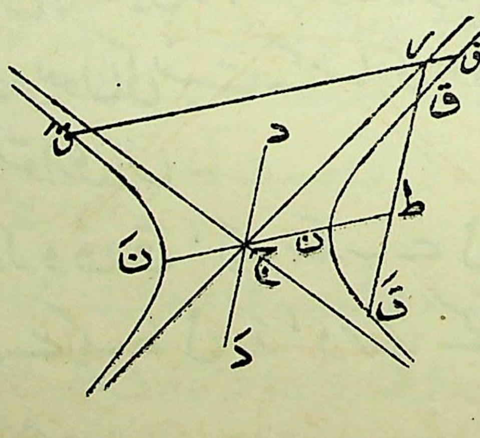
را میں سے قطع زائد کا وتر ق قَ، ن ج نَ کے متوازی کھینچو۔ (179)

اب نیوٹن کے مسئلہ کی رو سے

ط ق × ط قَ : ط ن × ط نَ = راق × راقَ : راق × راقَ

∴ ـ قط^{۲} : ط ن × ط نَ = ج د^{۲} :ـ ج ن^{۲}

یعنی قط^{۲} : ن ط × نَ ط = ج د^{۲} : ج ن^{۲}



یہ وہ عام مسئلہ ہے جس کی ایک مخصوص صورت دفعہ ۱۶۷ کا مسئلہ ہے۔

ہم اس رشتہ کو اِس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{ق ط}^2 : \text{ج ط}^2 - \text{ج ن}^2 = \text{ج دَ}^2 : \text{ج ن}^2$$

۱۷۵ — دفعات ۱۶۷، ۱۷۴ سے ہم دیکھتے ہیں کہ قطع زائد کو ایک مستوی میں ایک ایسے نقطہ کا طریق سمجھا جاسکتا ہے کہ ایک ثابت خط ل سے اسکے فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے دو دوسرے ثابت خطوں لَ اور لً سے اس کے فاصلوں کا حاصل ضرب جہاں یہ موخرالذکر دو خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہیں اور ایسے ہیں کہ نقطہ دونوں کی ایک ہی جانب واقع ہے۔

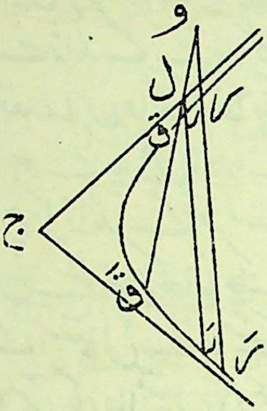
اگر لَ اور لً، ل پر عمود ہوں تو ل، قطع زائد کا قاطع محور ہوگا اور لَ اور لً اس کے راسوں پر کے مماس ہونگے۔

اگر لَ اور لً، ل پر عمود نہ ہوں تو ل، قطع زائد کا ایک قطر ہوگا اور لَ اور لً اُن نقطوں پر کے مماس ہونگے جہاں یہ قطر قطع زائد سے ملتا ہے۔

۱۷۶ — مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے وتر ق قَ، ر رَ ہوں جو نقطہ و پر متقاطع ہوتے ہیں تو نسبت وق × وقَ : ور × ورَ اُن قطروں کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوگی جو اِن وتروں کے علی الترتیب متوازی ہیں۔ (180)

فرض کرو کہ و ق قَ، ایک متقارب سے ل پر ملتا ہے۔

ل میں سے ایک خط ل ر رَ، و ر رَ کے متوازی کھینچو جو منحنی سے ر اور رَ پر ملے۔



اب نیوٹن کے مسئلہ سے

وق × وقَ : ور × ورَ = ل ق × ل قَ : ل ر × ل رَ
= ق قَ کے متوازی قطر کا مربع
: ر رَ

۱۷۷ـ یہ مسئلہ اسی طرح درست رہتا ہے اگر کسی ایک یا دونوں وتروں کے سرے قطع زائد کی مخالف شاخوں پر واقع ہوں بشرطیکہ وق × وقَ اور ور × ورَ کو صرف مثبت مقداروں کے طور پر لیا جائے۔ کیونکہ فرض کرو کہ ق، قَ مخالف شاخوں پر اور ر، رَ ایک ہی شاخ پر واقع ہیں تو چونکہ ل ق اور ل قَ مخالف سمتوں میں ہیں اس لئے نیوٹن کے مسئلہ کے اطلاق کے لئے ہمیں کہنا چاہیئے کہ

ل ق × ل قَ = ـ ق ل × ل قَ = ق قَ کے متوازی قطر کا مربع منفی علامت کے ساتھ

لیکن چونکہ وق × وقَ = ـ ق و × وقَ اس لئے

ق و × وقَ : ور × ورَ = ق قَ کے متوازی قطر کا مربع
: ر رَ کے متوازی قطر کا مربع

(181) **۱۷۸** — دفعہ ۱۱۶ میں مرکز اور مخروطیوں کے لئے عام صورت میں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اُسے زائد کے لئے جداگانہ طور پر ثابت کرنا شاید غیر ضروری معلوم ہو۔ لیکن ہمارا مقصد اِس واقعہ کو ظاہر کرنا ہے کہ دفعہ ۱۱۶ کے قطر خود منحنی کے طولی قطر ہونے چاہئیں اور ایسے قطروں کے لئے مسئلہ محولۂ بالا درست ہے۔ لیکن چونکہ زائد کے قطر سب کے سب منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتے اس لئے ہم یہ دکھانا چاہتے تھے کہ مزدوج زائد کے قطر کس طرح اُن کی بجائے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ جب کبھی و ق × و قَ اور و ر × و رَ کی علامتیں (دیکھو ترقیم دفعہ ۱۷۶، ۱۷۷) مختلف ہوں تو اس کا یہ مطلب ہوگا کہ ق قَ، ر رَ کے متوازی قطر ایسے ہیں کہ اِن میں سے صرف ایک، زائد سے ملتا ہے اور دوسرا، مزدوج زائد سے ملتا ہے۔

۱۷۹ — اب ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر مزدوج زائد کا ایک قطر ج دَ ہو تو وہ خیالی نقطے ضہ، ضہَ جہاں یہ قطر ابتدائی زائد سے ملتا ہے حسب ذیل رشتوں سے معلوم ہوتے ہیں

$$\text{ج ضہ}^{۲} = \text{ج ضہَ}^{۲} = -\text{ج د}^{۲}$$

اگر طالب علم ہندسہ تحلیلی سے واقف ہے تو وہ فوراً حسب ذیل تشریح سے مسئلہ بالا اخذ کر لیگا۔

زائد کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} - \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور مزدوج زائد کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} - \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = -۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اس طرح (۲) پر کے ہر نقطہ (لا، ما) کے جواب میں (۱) پر ایک نقطہ (خ لا، خ ما) ہے اور اس کے برعکس۔

پس اگر مرکز میں سے گذرنیوالا ایک خط مزدوج زائد (۲) سے نقطہ (لا، ما) پر ملے تو وہ ابتدائی زائد سے (خرلا، خرما) پر ملیگا۔

۱۸۰ — مسئلہ — اگر ایک قطع زائد کے مزدوج نیم قطر جن

اور جد ہوں تو

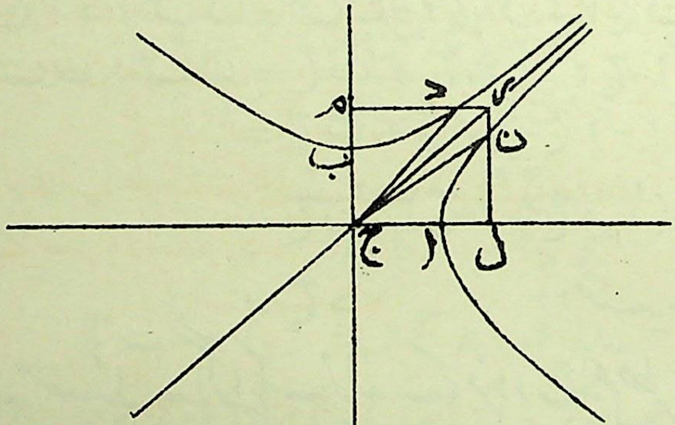
$$\text{جن}^{2} - \text{جد}^{2} = \text{جا}^{2} - \text{جب}^{2}$$

قاطع اور مزدوج محوروں پر معین ن ل اور د م نکالو۔

(182) یہ معین ایک متقارب کے نقطہ ر پر متقاطع ہونگے (دفعہ ۱۶۸) اور

$$\text{جن}^{2} = \text{جل}^{2} + \text{نل}^{2} = \text{جر}^{2} - (\text{رل}^{2} - \text{نل}^{2})$$

$$= \text{جر}^{2} - \text{بج}^{2} \qquad (\text{دفعہ ۱۶۶})$$



اور

$$\text{جد}^{2} = \text{جم}^{2} + \text{دم}^{2} = \text{جر}^{2} - (\text{رم}^{2} - \text{دم}^{2})$$

$$= \text{جر}^{2} - \text{جا}^{2}$$

$$\therefore\ \text{جن}^{2} - \text{جد}^{2} = \text{جا}^{2} - \text{جب}^{2}$$

نتیجۂ صریح۔ اگر ج ا = ج ب یعنی اگر منحنی قائم زائد ہو تو

ج ن = ج د

۱۸۱۔ مسئلہ۔ اگر زائد پر کوئی نقطہ ن ہو تو

س ن × سَ ن = ج د^۲

جہاں ج د وہ نیم قطر ہے ج ن کا مزدوج ہے۔

چونکہ س سَ کا نقطہ وسطی ج ہے اس لئے

س ن^۲ + سَ ن^۲ = ۲ ج س^۲ + ۲ ج ن^۲ (دفعہ ۱۰)

∴ (سَ ن - س ن)^۲ + ۲ س ن × سَ ن = ۲ ج س^۲ + ۲ ج ن^۲

یعنے ۴ ج ا^۲ + ۲ س ن × سَ ن = ۲ ج س^۲ + ۲ ج ن^۲

∴ س ن × سَ ن = ج ن^۲ + ج س^۲ - ۲ ج ا^۲

= ج ن^۲ + ج ب^۲ + ج ا^۲ - ۲ ج ا^۲

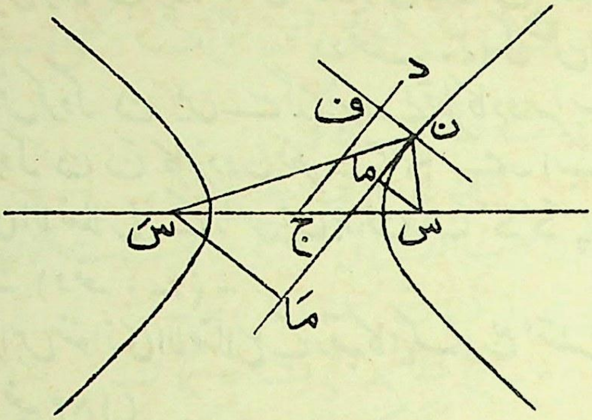
= ج ن^۲ - (ج ا^۲ - ج ب^۲)

= ج د^۲ (دفعہ ۱۸۰)

(183) **۱۸۲۔ مسئلہ۔** اگر ایک زائد کے مزدوج نیم قطر ج ن اور ج د ہوں اور ن پر کا مُعیّن ج د سے ف پر ملے تو

ن ف × ج د = ا ج × ب ج

اسکوں سے ن پر کے مماس پر عمود س ما اور سَ مَا نکالو۔



چونکہ مثلثات س ن ما اور سَ ن مَا متشابہ ہیں اسلئے

$$\frac{\text{س ما}}{\text{س ن}} = \frac{\text{سَ مَا}}{\text{سَ ن}} = \frac{\text{سَ مَا} - \text{س ما}}{\text{سَ ن} - \text{س ن}} = \frac{\text{۲ ن ف}}{\text{۲ ا ج}} = \frac{\text{ن ف}}{\text{ا ج}}$$

$$\therefore \frac{\text{س ما} \times \text{سَ مَا}}{\text{س ن} \times \text{سَ ن}} = \frac{\text{ن ف}^{۲}}{\text{ا ج}^{۲}}$$

$$\text{یعنے} \quad \frac{\text{ب ج}^{۲}}{\text{ج د}^{۲}} = \frac{\text{ن ف}^{۲}}{\text{ا ج}^{۲}}$$

$$\therefore \text{ن ف} \times \text{ج د} = \text{ا ج} \times \text{ب ج}$$

نتیجۂ صریح ۔ اُس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سِروں پر کے مماسوں سے بنتا ہے مستقل اور ا اَ × ب بَ کے مساوی ہوتا ہے ۔

۱۸۳ ۔ مسئلہ ۔ اُس مثلث کا رقبہ جو ایک زائد کے متقاربوں اور اسکے کسی مماس سے بنتا ہے مستقل ہوتا ہے ۔

فرض کرو کہ ن پر کا مماس متقاربوں سے ل اور ل' پر ملتا ہے (دفعہ ۱۷۰ کی شکل استعمال کرو)

فرض کرو کہ ن میں سے گذرنیوالے قطر کا دوسرا سرا نَ ہے اور فرض کرو کہ ن نَ کا مزدوج قطر د ج دَ ہے۔ اب ل اور ل' اُس متوازی الاضلاع کے راس ہیں جو ن، نَ، د، دَ پر کے مماسوں سے (184) بنتا ہے۔ (دفعہ ۱۷۰)۔

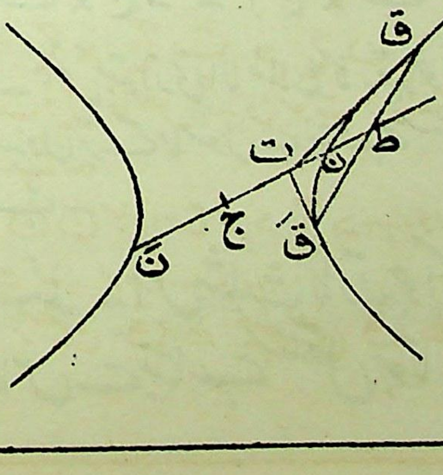
نیز اِس متوازی الاضلاع کے رقبہ کا ایک ربع، مثلث ج ل ل' ہے یعنی (دفعہ ۱۸۲)

۵ ج ل ل' = ج ا × ج ب

جو مستقل ہے۔

نتیجۂ صریح ۔ ایک خط دو ثابت خطوں کے ساتھ ملکر مستقل رقبہ کا ایک مثلث بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس خط کا لفاف ایک قطع زائد ہے جس کے متقارب دئے ہوئے دونوں ثابت خط ہیں اور متغیر خط اور اس کے لفاف کا نقطہ تماس اس خط کے اُس حصہ کا نقطہ وسطی ہے جو اِن ثابت خطوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے۔

۱۸۴۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کی ایک ہی شاخ پر مماس



ت ق اور ت قَ ہوں اور ج ت، منحنی سے ن پر اور ق قَ سے ط پر ملے تو

ج ط × ج ت = ج ن^{۲}

یہ نتیجہ فوراً قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت سے ماخوذ ہوتا ہے کیونکہ

(ن نَ، ت ط) = -۱

∴ ج ط × ج ت = ج ن^{۲}

۱۸۵ — مسئلہ — اگر ایک قطع زائد کی مخالف شاخوں پر مماس ت ق اور ت قَ ہوں اور ج ت، ق قَ سے ط پر اور مزدوج قطع زائد سے ن پر مِلے تو

ط ج × ج ت = ج ن^{۲}

اِس مسئلہ کو مسئلہ ماسبق سے اخذ کیا جا سکتا ہے کیونکہ اگر ج ت، (185)
ابتدائی قطع زائد سے خیالی نقطہ ن پر ملے تو (دفعہ ۱۷۹)

ج ن^{۲} = - ج ن^{۲}

∴ ج ط × ج ت = ج ن^{۲} (دفعہ ۱۸۴)

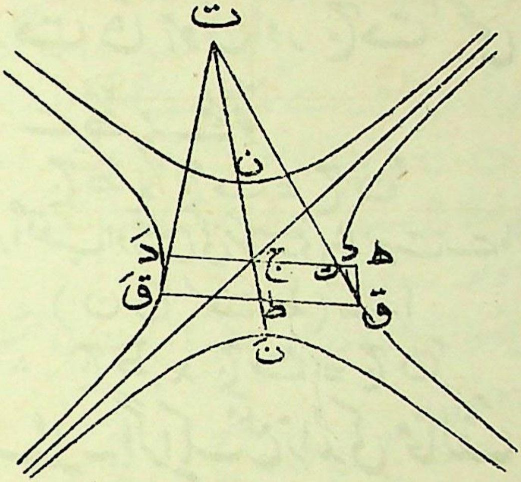
= - ج ن^{۲}

∴ ط ج × ج ت = ج ن

تاہم ہم حسب ذیل خالص ہندسی ثبوت دیتے ہیں جسمیں خیالی نقطوں کو داخل نہیں کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ ن نَ کا مزدوج قطر د ج دَ ہے جو زائد سے د، دَ پر اور ت ق سے تَ پر ملتا ہے۔

قطر دَ پر معیّن ق ھ کھینچو یعنی ق ھ، ن نَ کے متوازی ہے۔



اب متشابہ مثلثات ت ھ ق، ت ج ت سے

ت ج : ھ ق = ج ت : ت ھ

∴ ت ج × ھ ق : ھ ق^2 = ج ت × ج ھ : ج ھ × ت ھ

= ج ت × ج ھ : ج ھ^2 − ج ت × ج ھ

لیکن دفعہ ۱۸۴ کی رو سے

ج ت × ج ھ = ج د^2

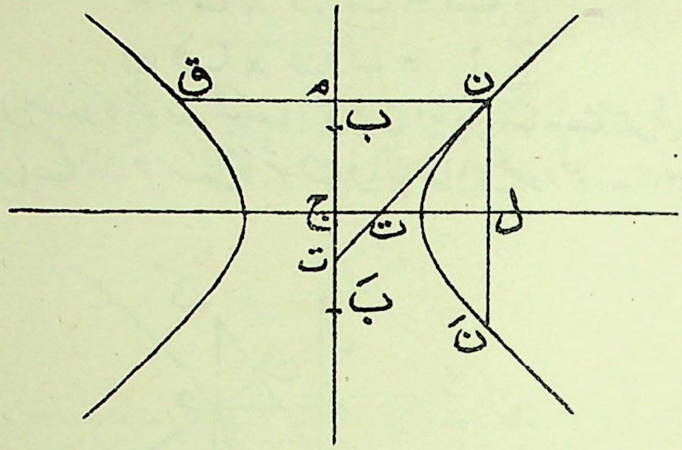
∴ ت ج × ھ ق : ھ ق^2 = ج د^2 : ج ھ^2 − ج د^2

(۱۸۵) لیکن ج ن^2 : ھ ق^2 = ج د^2 : ج ھ^2 − ج د^2 (دفعہ ۱۷۴)

∴ ت ج : ھ ق = ج ن^2

∴ ط ج × ج ت = ج ن^2

۱۸۶ — پچھلے دو مسئلوں کی خاص صورتیں حسب ذیل ہیں۔



اگر ایک قطع زائد کے نقطہ ن پر کا مماس، قاطع اور مزدوج محوروں سے علی الترتیب ت اور ت پر ملے اور اِن محوروں کے معیّن ن ل، ن م ہوں تو

ج ت × ج ل = ج ا^{۲}،

م ج × ج ت = ج ب^{۲}

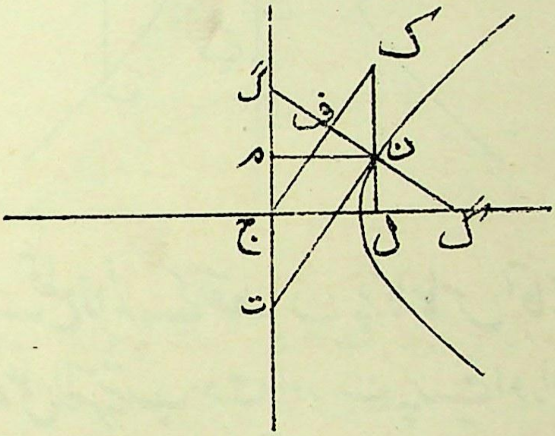
کیونکہ ت سے مماس ت ن اور ت نَ ہونگے جہاں نَ وہ نقطہ ہے جہاں ن ل، زائد سے مکرر ملتا ہے۔ نیز ت سے مماس ت ن اور ت ق ہونگے جہاں ق وہ نقطہ ہے جہاں ن م، زائد سے مکرر ملتا ہے۔

۱۸۷ ــ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے نقطہ ن پر کا عماد، قاطع اور مزدوج محوروں سے علی الترتیب گ اور گ پر ملے اور ن پر کے مماس کے متوازی قطر سے ف پر ملے تو

ف ن × ن گ = ب ج^{۲}'

ن ف × ن گ = ا ج^{۲}

(187) اِس مسئلہ کا ثبوت ٹھیک اسی طرح دیا جا سکتا ہے جس طرح قطع ناقص کے لئے اِس کے متناظر مسئلہ کا ثبوت دیا گیا تھا (دیکھو دفعہ ۱۴۴)۔



۱۸۸ — مسئلہ — اگر ایک قطع زائد کے نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملے اور ن ل معین ہو تو

ج گ = ز^{۲} × ج ل

اور ل گ : ج ل = ب ج^{۲} : ا ج^{۲}

یہ مسئلہ بھی حسب دفعہ ۱۴۴ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

دائرہ اِنحناء

۱۸۹ — مسئلہ — ایک قطع زائد کے کسی نقطہ ن پر دائرہ اِنحناء کا وہ وتر جو زائد کے مرکز میں سے گذرے $\frac{۲\,\text{ج د}'^{۲}}{\text{ج ن}}$ ہوتا ہے

اور دائرہ کا قطر $\frac{٢\,\text{ج دَ}^{٢}}{\text{ن ق}}$ ہوتا ہے۔

یہ مسئلہ اُسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے جس طرح ناقص کیلئے ثابت کیا جا چکا ہے۔

مثالیں

۱۔ اگر ایک قطع زائد کے ایک ماسکہ س میں سے ایک خط، ایک متقارب کے متوازی کھینچا جائے اور دوسرے ماسکہ سَ سے اس خط پر عمود سَ ک نکالا جائے، تو س ک = ا اَ [دفعہ ۱۵۷ استعمال کرو۔ ن کو سا پر لو]

۲ — ایک دائرہ دو ثابت دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے۔ اس دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

(188) ۳ — اگر ایک قطع زائد کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ایک متقارب کو ت پر قطع کرے اور س ن اسی متقارب کو ق پر قطع کرے تو س ق = ق ت۔ [ت ن اور ت سا کے محاذی س پر مساوی زاوئے بنتے ہیں]

۴ — ثابت کرو کہ جب قطع زائد کے مزدوج قطروں کا ایک زوج مقدار اور محل میں دیا جاتا ہے تو متقارب پوری طرح معلوم ہو جاتے ہیں۔ اس لئے ثابت کرو کہ صرف دو قطعات زائد ہوتے ہیں جنمیں مزدوج قطروں کا ایک معلومہ زوج ہوتا ہے۔

۵ — اگر دو قطعات زائد کے متقاربات ایک ہی ہوں تو ایک کا وتر جو دوسرے کو مس کرے نقطہ تماس پر تنصیف ہوگا۔

۶ — اگر ایک قطع زائد کے متقاربوں ج سا، ج سَا کے متوازی خطوط ن ھ، ن ک کھینچے جائیں جو ج سَا اور ج سا سے ھ اور ک پر ملیں تو

$$\text{ن ھ} \times \text{ن ک} = \frac{١}{٤}\,\text{ج سَ}^{٢}$$ [دفعہ ۱۸۳ استعمال کرو]

۷ — ایک قطع زائد کے نقطہ ن پر کا مماس ایک متقارب سے ت پر ملتا ہے

اور ت ق، دوسرے متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہے جو منحنی سے ق پر ملتا ہے ن ق، متقارب سے ل اور م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ل م کی تثلیث نقطوں ن اور ق پر ہوتی ہے۔

۸ — ایک قطع زائد کے ایک متقارب کے کسی نقطہ ر سے ر ن ل، قاطع محور پر عمود کھینچا گیا ہے جو منحنی سے ن پر ملتا ہے۔ ر ک، ج ر کے علی القوائم کھینچا گیا ہے جو قاطع محور سے ک پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ک، ن پر عماد ہے۔ [ثابت کرو کہ ج ل = $ز^۲$ × ج ک، دفعہ ۱۸۸]

۹ — ثابت کرو کہ کسی مرکز دار مخروطی مین اگر ن پر کا عماد، محوروں سے گ اور گ پر ملے تو ن گ × ن گ = ج $د^۲$ جہاں ج د، ج ن کا مزدوج ہے

۱۰ — اگر ایک قطع زائد کے نقطہ ن پر کا مماس متقاربوں سے ل اور ل پر ملے اور ن پر کا عماد محوروں سے گ اور گ پر ملے تو ل، ل، گ، گ ایک دائرہ پر واقع ہونگے جو زائد کے مرکز میں سے گذریگا۔

۱۱ — متقاربوں کے درمیان زائد کے کسی مماس کا مقطوعہ بعید تر ماسکہ پر اپنے محاذی ایسا زاویہ بناتا ہے جو ان کے درمیانی زاویہ کے نصف کے مساوی ہوتا ہے۔

۱۲ — ایک قطع ناقص کا ایک ماسکہ اور اس پر کے دو نقطے دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرا ماسکہ ایک قطع زائد مرتسم کرتا ہے۔

۱۳ — اگر ایک مرکز دار مخروطی پر جس کے ماسکے س اور سَ ہیں کوئی نقطہ ن ہو تو س ن اور سَ ن کو قطر مانکر کھینچے ہوئے دائرے امدادی دائرہ کو مس کرینگے اور ان کا بنیادی محور، ن کا معین ہوگا۔

۱۴ — ایک مرکز دار مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کے مماس کا قطب، امدادی دائرہ کے لحاظ سے ن کے معین پر واقع ہوگا۔

۱۵ — اگر ایک قطع زائد کے مزدوج قطر ن نَ اور د دَ ہوں اور منحنی پر (189)
کوئی نقطہ ق ہو تو ق $ن^۲$ + ق $نَ^۲$، ق $د^۲$ + ق $دَ^۲$ سے بقدر ایک مستقل مقدار کے بڑا ہوگا۔

۱۶ — ایک قطع مکافی کے دو نقطے اور اس کے محور کی سمت دی گئی ہے۔

ثابت کرو کہ اِس کے ماسکہ کا طریق ایک قطع زائد ہے۔

۱۷ — اگر ایک قطع زائد کے دو مماس کھینچے جائیں تو وہ خطوط جو متقاربوں کے ساتھ اِن کے نقاط تقاطع کو ملاتے ہیں متوازی ہونگے۔

۱۸ — اگر ایک قطع زائد کے کسی نقطہ ن سے ن ک، کسی متقارب کے متوازی کھینچا جائے اور ن ک، ایک مرتب سے ک پر ملے اور نظیری ماسکہ س ہو تو ن ک = س ن۔

۱۹ — اگر ایک مرکز دار مخروطی کے نقطہ ن پر کا مماس اور عماد، محور سے ت اور گ پر ملیں اور ن ل معین ہو تو ل گ × ج ت = ب ج^{۲}۔

۲۰ — ایک مثلث کا قاعدہ اور اِس قاعدہ اور اندرونی دائرہ کا نقطہ تماس دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ راس کا طریق ایک قطع زائد ہے۔

۲۱ — اگر ہم ماسکی قطعات زائد کے ایک سلسلہ کے مماس کھینچے جائیں تو اِن کے نقاط تماس پر کے عماد سب کے سب ایک ثابت نقطہ میں سے گذرینگے اور نقاط تماس ایک دائرہ پر واقع ہونگے۔

۲۲ — ایک قطع مکافی کھینچا گیا ہے جو ایک قطع زائد کے صدر محوروں کو اِن کے سروں میں سے ایک پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک متقارب، قطع مکافی کے محور کے متوازی ہے اور دوسرا متقارب، قطع مکافی کے اُن وتروں کے متوازی ہے جو پہلے متقارب سے منصیف ہوتے ہیں۔

۲۳ — اگر ایک قطع ناقص اور اُس کا ہم ماسکی ایک قطع زائد، ن پر متقاطع ہوں تو زائد کے متقارب اُن نقاط میں سے گذرینگے جن پر ن پر کے معین قطع ناقص کے امدادی دائرہ کو قطع کرتے ہیں۔

۲۴ — ثابت کرو کہ اُس نقطہ کا مرکزی فاصلہ جہاں ایک قطع زائد کا مماس ایک متقارب سے ملتا ہے دوسرے متقارب سے نقطہ تماس کے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے جبکہ یہ فاصلہ قاطع محور کے متوازی لیا گیا ہو۔

۲۵ — ایک قطع زائد کے مماس ر ن رَ اور ت ق تَ کھینچے گئے ہیں جہاں ر، ت ایک متقارب پر ہیں اور رَ، تَ دوسرے متقارب پر

ثابت کرو کہ ر اتَ اور رَ ات کو قطر مانکر کھینچے ہوئے دائرے مرتب دائرہ کے ساتھ ہم محور ہیں۔

۲۶ — ایک قطع زائد کے ایک دئے ہوئے قطر پر کسی نقطہ ن سے دو خطوط مستقیم متقاربوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو قطع زائد سے ق اور قَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق، ن قَ میں نسبت مستقل ہے۔

۲۷ — ایک زائد کے دونوں متقارب اور زائد پر کا ایک نقطہ دئے گئے ہیں وہ نقطے معلوم کرو جن پر ایک دیا ہوا خط منحنی سے ملتا ہے۔ 19(1)

۲۸ — اگر ایک قطع زائد کے نقطہ ن کا معین ن ل اور عماد ن گ ہو اور قطع زائد کا مرکز ج ہو اور اگر ن پر کا مماس متقاربوں کو ت اور تَ پر قطع کرے تو ج ت اور ج تَ کے مجموعہ کا نصف، ج ل اور ج گ کے درمیان وسط تناسب ہوگا۔

۲۹ — مرتب دائرہ پر کے کسی نقطہ سے کسی مخروطی کے مماس اُن زاویوں کے ناصف ہوں گے جو اِس نقطہ میں سے گذرنیوالے مزدوج خطوں کے ہر زوج کے درمیان ہوتے ہیں۔

۳۰ — ایک مخروطی کا ایک ماسکہ، ایک مماس، اور خروج المرکز دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۳۱ — اگر ایک مرکزدار مخروطی پر ن کوئی ایسا نقطہ ہو کہ وہ خطوط جو ن کو ماسکوں سے ملاتے ہیں علی القوائم ہیں تو $\text{ج د}^2 = ۲\,\text{ب ج}^2$ ۔

۳۲ — ایک قطع زائد کے محوروں کا محل اور انکی مقدار معلوم کرو جبکہ قطع زائد ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے گذرے، ایک دئے ہوئے خط کو ایک دئے ہوئے نقطہ پر مس کرے اور ایک دیا ہوا خط اُس کا متقارب ہو۔

۳۳ — اگر ایک قطع زائد پر جس کے ماسکے س اور سَ ہیں ن کوئی نقطہ ہو تو مثلث س ن سَ کا اندرونی مرکز اُس مماس پر واقع ہوگا جو قطع زائد کے راسوں میں سے ایک پر کھینچا گیا ہو۔

۳۴ — ایک قطع ناقص کے دو مزدوج قطروں کو متقارب مانکر مزدوج زائد دو نکا

ایک زوج کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ایک زائد ناقص کو مس کرے تو دوسرا بھی مس کریگا اور وہ قطر جو نقاط تماس میں سے کھینچے گئے ہوں ایک دوسرے کے مزدوج ہونگے۔

۳۵ — ثابت کرو کہ ایک دائرہ اُن چار خطوں کو مس کرتا ہوا کھینچا جا سکتا ہے جو ایک زائد کے ماسکوں کو زائد کی ایک ہی شاخ پر کے کسی دو نقطوں سے ملاتے ہیں۔

۳۶ — ایک قطع زائد کے مماس کھینچے گئے ہیں اور ہر مماس کا وہ حصہ جو متقاربوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ تقسیم کا طریق ایک قطع زائد ہے۔

۳۷ — ایک قطع زائد کے ایک متقارب پر کسی نقطہ ر سے خط ر ع کھینچا گیا ہے جو زائد کو ع پر مس کرتا ہے اور ع میں سے خطوط ع ت اور ع ط متقاربوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو ایک قطر کو ت اور ط پر قطع کرتے ہیں۔ ر ط کو ملایا گیا ہے جو زائد کو ن، ن پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ت ن اور ت ن زائد کو مس کرتے ہیں۔

[زائد کو ایک دائرہ میں اور ط کو مرکز میں منظلل کرو]

۳۸ — ایک قطع زائد کے مزدوج نیم قطر ج ن اور ج د ہیں اور ن پر کا مماس ایک متقارب سے ل پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ن د، قاطع محور سے ف پر ملے تو ل ف ج ایک قائمہ زاویہ ہے۔

۳۹ — ایک قطع زائد پر ایک دئے ہوئے نقطہ سے ایک ایسا خط مستقیم کھینچو کہ قطع زائد کے ساتھ اس کے دوسرے نقطہ تقاطع اور ایک دئے ہوئے متقارب کے درمیان اِس کا مقطوعہ ایک دئے ہوئے خط کے مساوی ہو۔ یہ مسئلہ کب ناممکن ہو جاتا ہے؟ (191)

۴۰ — اگر دو دائروں س۱ اور س۲ پر جو ایک ہم محور نظام سے متعلق ہیں جنکا ایک انتہائی نقطہ ل ہے ن اور ق دو ایسے نقطے ہوں کہ زاویہ ن ل ق ایک قائمہ زاویہ ہے تو ثابت کرو کہ اُس عمود کا پائیں جو ل سے

ن ق پر کھینچا گیا ہو ہم محور نظام کے ایک دائرہ پر واقع ہوتا ہے اور اس لئے ثابت کرو کہ ن ق کا لفاف ایک مخروطی ہے جسکا ایک ماسکہ ل پر ہے۔

۱۴۱ — اگر ایک مخروطی ایک مثلث کے ضلعوں کو اُن عمودوں کے پائین پر مس کرے جو راسوں سے متقابلہ اضلاع پر کھینچے گئے ہیں تو مخروطی کا مرکز مثلث کے شبہ وسطی نقطہ پر ہونا چاہئے۔

(192)

چودھواں باب

قائم زائد

۱۹۰ — قائم زائد جیسا کہ ہم پہلے بتا چکے ہیں وہ زائد ہے جس کے متقارب علی القوائم ہوتے ہیں اور اس کے قاطع اور مزدوج محور مساوی ہوتے ہیں۔
قائم زائد کا خروج المرکز = $\sqrt{۲}$ کیونکہ ز = ج س : ج ا اور ج س^{۲} = ج ا^{۲} + ج ب^{۲} = ۲ ج ا^{۲}

اب ہم مسئلوں کا ایک سلسلہ پیش کرینگے جن سے اس منحنی کے امتیازی خواص ظاہر ہونگے۔

۱۹۱ — مسئلہ — قائم زائد میں مزدوج قطر مساوی ہوتے ہیں اور اگر ایک قطر ن ج نَ کا مُعین ق ط ہو تو ق ط^{۲} = ن ط × نَ ط۔

کیونکہ ج ن^{۲} - ج د^{۲} = ج ا^{۲} - ج ب^{۲} (دفعہ ۱۸۰)
= ۰
اور ق ط^{۲} : ن ط × نَ ط = ج د^{۲} : ج ن^{۲} (دفعہ ۱۷۴)
= ۱

۱۹۲ — قائم زائد کے مزدوج قطر ہر متقارب کے ساتھ مساوی طور پر

مائل ہوتے ہیں۔

کیونکہ متقارب اُس درپیچ پنسل کے دوہرے خطوط ہیں جو ج میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے زوجوں سے بنتی ہے۔ اور اِس لئے متقارب مزدوج قطروں کے کسی زوج کے ساتھ موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔ پس چونکہ متقارب ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اِس لئے وہ اُن زاویوں کے ناصف ہونے چاہئیں جو مزدوج قطروں کے ہر زوج کے درمیان بنتے ہیں (دفعہ ۷۲)

نتیجۂ صریح (۱) قائم زائد کا کوئی قطر اور اِس کے سِروں پر کے مماس ہر متقارب کے ساتھ مساوی طور پر مائل ہوتے ہیں۔

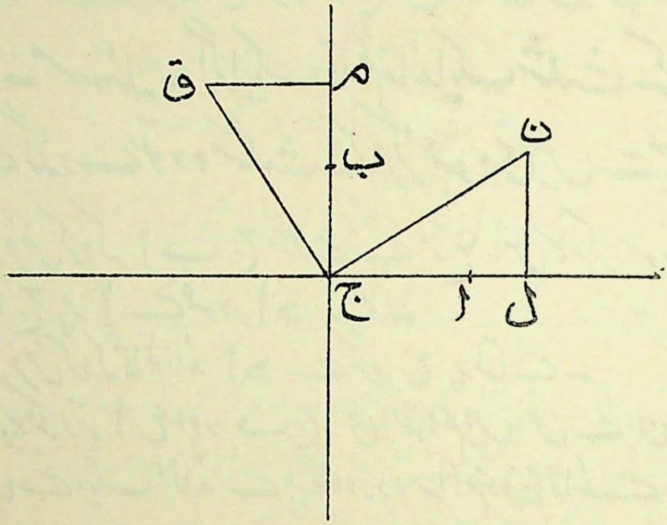
نتیجۂ صریح (۲) قائم زائد کا کوئی وتر اور اِسکی تنصیف کرنیوالا قطر ہر متقارب کے ساتھ مساوی طور پر مائل ہوتے ہیں۔ (193)

۱۹۳ — مسئلہ۔ قائم زائد کا کوئی قطر مزدوج زائد کے اُس قطر کے مساوی ہوتا ہے جو اِس پر عمود ہے۔

یہ ظاہر ہو جاتا ہے جب ہم غور کرتے ہیں کہ مزدوج زائد اس خاص صورت میں ابتدائی زائد کے مساوی ہے اور یہ مزدوج زائد اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ ابتدائی زائد کی پوری شکل کو ایک محور کے گرد جو اس کے مرکز میں سے گذرے اور اس کے مستوی پر عمود ہو ایک قائمہ زاویہ میں سے گھمایا جائے۔

۱۹۴ — اگر کسی زائد کا ایک قطر اس کے مزدوج زائد کے ایک قطر کے مساوی اور اِس پر عمود ہو تو زائد کو قائم زائد ہونا چاہئے۔

فرض کرو کہ ج ن اور ج ق دو نیم قطر ایک دوسرے کے علی القوائم اور ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور ن قطع زائد پر ہے اور ق مزدوج قطع زائد پر۔



ن ل اور ق م علی الترتیب قاطع اور مزدوج محوروں پر عمود کھینچو۔

اب $\triangle\,\text{ج ل ن} \equiv \triangle\,\text{ج م ق}$

لیکن $\text{ن ل}^2 : \text{ج ل}^2 - \text{ج ا}^2 = \text{ب ج}^2 : \text{ا ج}^2$ (دفعہ ۱۶۷) (194)

اور $\text{ق م}^2 : \text{ج م}^2 - \text{ب ج}^2 = \text{ا ج}^2 : \text{ب ج}^2$

$$\therefore\ \frac{\text{ج ل}^2}{\text{ا ج}^2} - \frac{\text{ن ل}^2}{\text{ب ج}^2} = ۱$$

اور
$$\frac{\text{ج م}^2}{\text{ب ج}^2} - \frac{\text{ق م}^2}{\text{ا ج}^2} = ۱$$

تفریق کرو اور $\text{ج ل}^2 = \text{ج م}^2$ اور $\text{ن ل}^2 = \text{ق م}^2$ کو استعمال کرو تو

$$\text{ج ل}^{۲}\left(\frac{۱}{\text{اج}^{۲}}-\frac{۱}{\text{ب ج}^{۲}}\right)-\text{ن ل}^{۲}\left(\frac{۱}{\text{ب ج}^{۲}}-\frac{۱}{\text{اج}^{۲}}\right)=۰$$

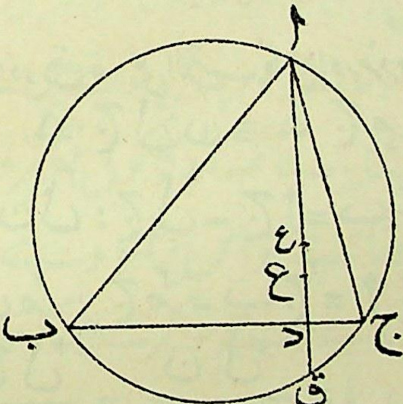
$\therefore$ اج = ب ج کیونکہ $\text{ج ل}^{۲}+\text{ن ل}^{۲}\neq ۰$

۱۹۵۔ مسئلہ۔ اگر ایک قائم زائد ایک مثلث کے راسوں میں سے گذرے تو وہ مثلث کے مرکز عمودی میں سے بھی گذریگا۔

فرض کرو کہ ا ب ج مثلث ہے، ع اس کا مرکز عمودی ہے اور ب ج پر ا سے عمود اد ہے۔

فرض کرو کہ قائم زائد اد سے مکرر ع پر ملتا ہے۔

چونکہ وتر اع اور ب ج علی القوائم ہیں اس لئے اِن کے متوازی قطروں میں سے ایک، زائد سے ملیگا اور دوسرا، مزدوج زائد سے۔



پس دب × دج اور دع × دا مختلف العلامت ہونگے (دفعہ ۱۷۷)

اور اِنکی عددی قیمتوں کی نسبت ایک کے مساوی ہوگی کیونکہ اِن کے متوازی قطر علی القوائم ہونے کی وجہ سے مساوی ہیں۔

∴ ب د × د ج = د ع × د ا

لیکن ب د × د ج = ا د × د ق جہاں ق وہ نقطہ ہے (195)
جسپر ا د ممدودہ حائط دائرہ سے
ملتا ہے۔

= − ا د × د ع (دفعہ ۶)

∴ د ع × د ا = د ا × د ع

∴ د ع = د ع

یعنے ع، ع پر منطبق ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح — جب قائم زائد ایک مثلث کو محیط کر لیتا ہے تو اگر تینوں راس منحنی کی ایک ہی شاخ پر واقع ہوں تو مرکز عمودی دوسری شاخ پر واقع ہوگا لیکن دو راس ایک شاخ پر واقع ہوں اور تیسرا راس دوسری شاخ پر تو مرکز عمودی اس شاخ پر واقع ہوگا جسپر دو راس واقع ہیں۔

۱۹۶ — مسئلہ — اگر کوئی مخروطی جو ایک مثلث کو محیط کرے مثلث کے مرکز عمودی میں سے گذرے تو یہ مخروطی قائم زائد ہونا چاہیئے۔

فرض کرو کہ ا ب ج مثلث ہے اور ا د، ب ع، ج ف وہ عمود ہیں جو مرکز عمودی ع پر ملتے ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ مخروطی کو قطع زائد ہونا چاہیئے کیونکہ یہ ناممکن ہے کہ قطع ناقص یا قطع مکافی کے دو وتر ایک نقطہ پر جو اِن میں سے ایک کے باہر ہو اور دوسرے کے اندر ہو متقاطع ہوں لیکن وتر ا ع اور ب ج اسی طرح متقاطع ہوتے ہیں جو صرف زائد کی صورت میں ممکن ہے۔

اب چونکہ ب د × د ج = ا د × ع د اِس لئے ب ج کے متوازی

قطر = ا ن کے متوازی قطر۔

اور ان قطروں میں سے ایک، قطع زائد سے متعلق ہونا چاہیئے اور دوسرا اس کے مزدوج زائد سے کیونکہ د ب × د ج اور د ع × د ا مختلف العلامت ہیں۔

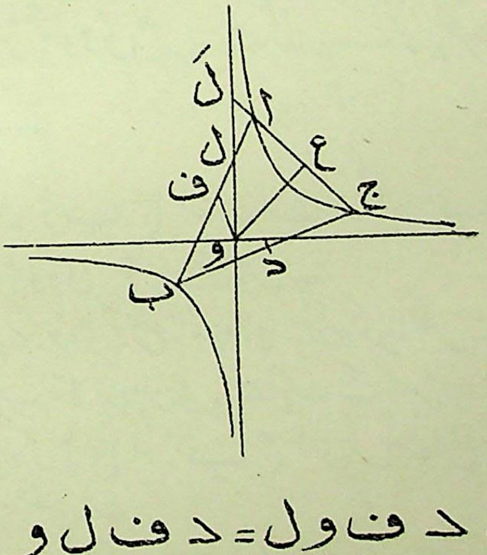
اسلئے قطع زائد قائم زائد ہونا چاہیئے (دفعہ ۱۹۴)۔

۱۹۷۔ مسئلہ۔ اگر قائم زائد ایک مثلث کو محیط کرے تو اسکا مرکز مثلث کے نو نقطی دائرہ پر واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ ا ب ج مثلث ہے اور ضلعوں کے وسطی نقطے د، ع، ف ہیں۔

فرض کرو کہ قائم زائد کا مرکز و ہے اور و ل لَ ایک متقارب ہے جو ا ب اور ا ج کو ل اور لَ پر قطع کرتا ہے۔

چونکہ و ف، وتر ا ب کی تنصیف کرتا ہے اسلئے و ف اور ا ب، و ل لَ کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں (دفعہ ۱۹۲ نتیجہ نمبر ۲)



∴ ∠ ف و ل = ∠ ف ل و

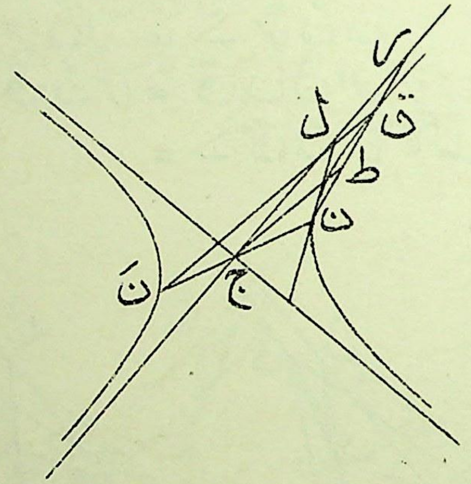
اسی طرح ∠ ع و لَ = ∠ ع لَ و (196)

∴ ∠ ف و ع = ∠ ا ل لَ + ∠ ا لَ ل = ∠ ب ا ج

= ∠ ف د ع

∴ و اُس دائرہ پر واقع ہے جو د ع ف کو محیط کرتا ہے اور یہ دائرہ مثلث کا نو نقطی دائرہ ہے ۔

۱۹۸ ــ مسئلہ ــ قائم زائد کے کسی وتر ن ق اور ن پر کے مماس کے درمیان زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ن ق کے محاذی نَ پر بنتا ہے جہاں نَ، ن میں سے گذرنیوالے قطر کا دوسرا سِرا ہے ۔



فرض کرو کہ وتر ن ق اور ن پر کا مماس، متقارب ج سا سے ر اور ل پر ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ ن ق کا وسطی نقطہ ط ہے ۔

اب ∠ ط ر ج = ∠ ط ج ر (دفعہ ۱۹۲ نتیجہ صریح ۲) (197)

اور ∠ ن ل ج = ∠ ن ج ل (" " ")

∴ ∠ ل ن ر = ج ل ن - ∠ ج ر ط

= ∠ ن ج ل - ∠ ط ج ر = ∠ ط ج ن

= ∠ ق نَ ن (کیونکہ ج ط ' ق نَ کے متوازی ہے)

۱۹۹ - مسئلہ - قائم زائد کا کوئی وتر کسی قطر کے سروں پر اپنے محاذی ایسے زاویے بناتا ہے جو مساوی ہوتے ہیں یا تکمیلی -

فرض کرو کہ ایک وتر ق ر ہے اور ایک قطر ن ج نَ -

فرض کرو کہ ن اور نَ پر کے مماس متقاربوں سے ل ' ل اور لَ ' لَ پر ملتے ہیں -

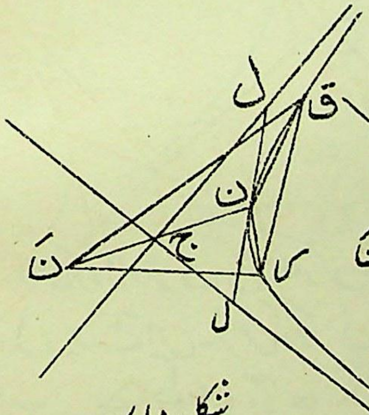
شکل (۱) میں جہاں ق اور ر ایک ہی شاخ پر واقع ہیں اور ن نَ ' ق ر کو داخلاً قطع کرتا ہے

∠ ق ن ل = ∠ ق نَ ن (دفعہ ۱۹۸)

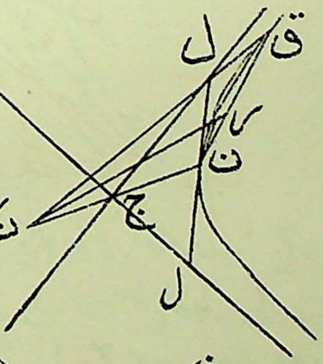
اور ∠ ر ن ل = ∠ ر نَ ن

∴ ∠ ق ن ر = ق ن ل اور ر ن ل کے مجموعہ کا تکملہ

= ∠ ق نَ ر کا تکملہ



شکل (۱)



شکل (۲)

شکل (۲) میں جہاں ق اور ر ایک ہی شاخ پر واقع ہیں اور ن نَ ' ق ر کو خارجاً قطع کرتا ہے

∠ ل ن ر = ∠ ر نَ ن

اور ∠ ل ن ق = ∠ ق نَ ن

∴ ∠ ر ن ق = ∠ ق نَ ن - ∠ ر نَ ن

= ∠ ق نَ ر

شکل (۳) میں جہاں ق اور ر مخالف شاخوں پر واقع ہیں اور ن نَ، ق ر کو داخلاً قطع کرتا ہے

∠ ق ن ر = ∠ ق ن ل + ∠ ل ن نَ

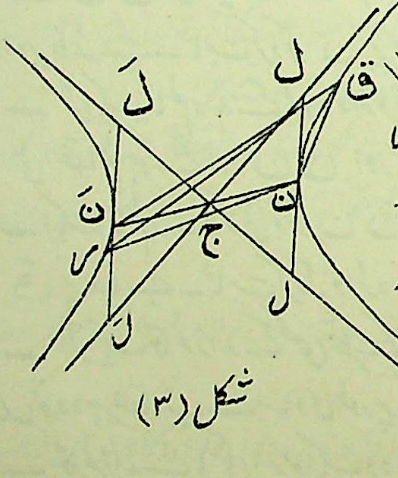
+ ∠ نَ ن ر

= ∠ ق نَ ن + ∠ ن نَ لَ

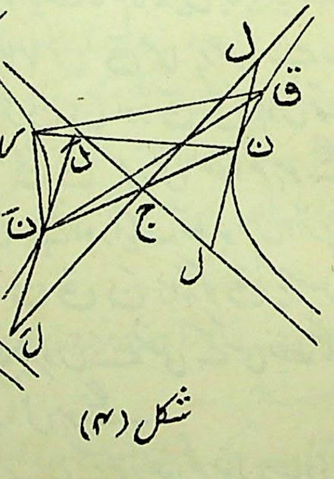
+ ∠ ر نَ لَ

= ∠ ق نَ ر

شکل (۴) میں جہاں ق اور ر مخالف شاخوں پر واقع ہیں اور ن نَ، ق ر کو خارجاً قطع کرتا ہے



شکل (۳)



شکل (۴)

∠ ق ن ر = ∠ ق ن ل + ∠ ل ن ر

= ∠ ق نَ ن + ∠ ل ن ر

اور ∠ ق نَ ر = ∠ ق نَ لَ + ∠ ل نَ ر

= ∠ ق نَ لَ + ∠ ر ن نَ

∴ ∠ ق ن ر + ∠ ق نَ ر = ∠ لَ نَ ن

+ ∠ ل ن نَ

= ۲ قائمہ زاوئے

مثالیں

۱ — قائم زائد کے کسی مماس کا وہ حصہ جو اس کے متقاربوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے اُس فاصلہ کا دُگنا ہوتا ہے جو اِس کے نقطہ تماس کا مرکز سے ہے۔

۲ — اگر ایک قائم زائد کے کسی نقطہ ن کا مُعین ن ل ہو اور ن پر کا عماد ن گ ہو تو ثابت کرو کہ ج ل = ل گ اور ن سے امدادی دائرہ کا مماس = ن ل

۳ — اگر ایک قطع زائد کے کسی نقطہ ن کے مماس پر مرکز سے عمود ج ک ہو تو مثلثات ن ج ا، ج ا ک متشابہ ہونگے۔

۴ — ن ق ر ایک مثلث ہے جو ایک قائم زائد میں بنایا گیا ہے اور ن پر کا زاویہ قائمہ ہے۔ ثابت کرو کہ ن پر کا مماس، ق ر پر عمود ہے۔ (199)

۵ — اگر ایک قائم زائد کے عمود دار وتر ن نَ اور ق قَ ہوں تو ن قَ، ق نَ علی القوائم ہونگے اور ن ق اور نَ قَ بھی علی القوائم ہونگے۔

۶ — ایک قائم زائد کا کوئی وتر ن نَ ہے اور ایک قطر جو اس وتر پر عمود ہے زائد سے ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ ن ق نَ زائد کو ق پر مس کرتا ہے

۷ — اگر ایک قائم زائد کے کسی قطر کے سِروں سے منحنی کے کسی نقطہ تک خطوط کھینچے جائیں تو وہ ہر متقارب سے مساوی طور پر مائل ہونگے۔

۸ — قائم زائد کے ماسکی وتر جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں مساوی ہوتے ہیں۔
[دیکھو دفعات ۱۱۶، ۱۱۷)

۹ — قائم زائد پر کے کسی نقطہ کا مرکز سے فاصلہ، اُن فاصلوں کے درمیان ہندسی

اوسط ہوتا ہے جو اس نقطہ کو ماسکوں سے ہوتے ہیں۔

۱۰ — اگر ایک قائم زائد کے قاطع محور پر ن نَ دو ہمراسین ہوں اور زائد کا مرکز ج ہو تو ج نَ، ن پر کے مماس پر عمود ہوگا۔

۱۱ — ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز کسی قائم زائد پر واقع ہوتا ہے جو اس مثلث کو محیط کرتا ہے جس کے راس مثلث کے جانبی دائروں کے مرکز ہیں۔

۱۲ — ماسکی وتر جو قائم زائد کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوں مساوی ہوتے ہیں۔

۱۳ — اگر ایک قائم زائد کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مزدوج قطروں کے ایک زوج سے ع اور ف پر ملے اور زائد کا مرکز ج ہو تو ن ج، دائرہ ج ع ف کو مس کریگا۔

۱۴ — دو مماس قائم زائد کی ایک ہی شاخ پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ زاویے جو یہ مماس مرکز پر بناتے ہیں علی الترتیب اُن زاویوں کے مساوی ہیں جو وہ وتر تماس کے ساتھ بناتے ہیں۔

۱۵ — ایک دائرہ اور ایک قائم زائد چار نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں اور ان کے مشترک وتروں میں سے ایک وتر، زائد کا ایک قطر ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرا مشترک وتر، دائرہ کا ایک قطر ہے۔

۱۶ — ایک دئے ہوئے متوازی الاضلاع کے اندر قطعات ناقص کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان کے ماسکے ایک قائم زائد پر واقع ہوتے ہیں۔

(200) ۱۷ — اگر ایک قائم زائد کے مزدوج محور کے کسی نقطہ ق سے راس تک ق ا کھینچا جائے اور ق ر، قاطع محور کے متوازی کھینچا جائے جو منحنی سے ر پر ملتا ہے تو ق ر = ا ق۔

۱۸ — قائم زائد کے مزدوج قطروں کے سروں کو ملانے والے خطوط متقاربوں پر عمود ہوتے ہیں۔

۱۹ — ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق دیا گیا ہے۔ اسکے راس کا طریق ایک قائم زائد ہوگا۔

۲۰ — قائم زائد کے متوازی وتروں پر کھینچے ہوئے دائرے ہم محور ہوتے ہیں۔

۲۱ — اگر ایک قائم زائد ایک مثلث کو محیط کرے تو مثلث پائین خود مزدوج مثلث ہوتا ہے ۔

۲۲ — قائم زائد کے کسی نقطہ ن پر نصف قطر انحناء ایسے بدلتا ہے جیسے ج ن^{۳} اور منحنی کا قطر انحناء کے مرکزی وتر کے مساوی ہوتا ہے ۔

۲۳ — قائم زائد کے کسی نقطہ پر عمادی وتر قطر انحناء کے مساوی ہوتا ہے ۔

۲۴ — ایک قائم زائد کے ایک متقارب پر زائد کے کسی نقطہ ن سے عمود ن ل کھینچا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ن ل کی سمت میں وتر انحناء $\frac{\text{ج ن}^{۲}}{\text{ن ل}}$ کے مساوی ہے ۔

پندرہواں باب

قائم تظلیل

۲۰۰ — جب ظِل کا راس جس کے ذریعہ کوئی شکل ایک مستوی س سے دوسرے مستوی س پر مظلل کیجاتی ہے ان مستویوں سے بہت بڑے فاصلہ پر ہو تو وہ خطوط جو ابتدائی شکل اور اس کے ظِل کے نظیری نقطوں کو ملاتے ہیں تقریباً متوازی ہو جاتے ہیں۔ اسطوانی ظِل ہم اس ظِل کو کہہ سکتے ہیں جس میں مستوی س کے نقطے مستوی س پر ایسے خطوں کے ذریعہ مظلل کئے گئے ہوں جو سب کے سب ایک دوسرے کے متوازی کھینچے گئے ہیں۔ ہم اسے مخروطی ظِل کی انتہائی صورت سمجھتے ہیں جبکہ راس ط لاتناہی پر ہو۔

اُس مخصوص صورت میں جبکہ نظیری نقطوں کو ملانیوالے خطوط مستوی س پر عمود ہوں جس پر مستوی س کی شکل مظلل کیجارہی ہے تو مستوی س پر اس طرح جو شکل حاصل ہوگی اُسے ابتدائی شکل کا قائم ظِل کہا جاتا ہے۔

فضا میں پھیلے ہوئے نقطے جنکا ایک مستوی میں ہونا ضروری نہیں ہے ایک مستوی پر اُن نقطوں سے عمود ڈالکر قائم طور پر مظلل کئے جا سکتے ہیں۔ ہر عمود کا پائین اُس نقطہ کا ظِل ہوگا جس سے وہ عمود کھینچا گیا ہے۔ اس طرح فضا کے وہ سب نقطے جو ایک ہی خط میں واقع ہوں اور یہ خط ظِل کے مستوی پر عمود ہو ایک ہی ظِل رکھینگے۔

اِس باب میں یہ دکھایا جائیگا کہ قطع ناقص کے بعض خواص کس طرح دائرہ کے خواص سے حاصل کئے جا سکتے ہیں کیونکہ ہم دیکھینگے کہ ہر قطع ناقص ایک دائرہ کا قائم ظِل ہے۔ لیکن اِس سے پیشتر قائم ظِل کے بعض خواص ثابت کرنا ضروری ہے

۲۰۱ ۔ ابتداءً یہ معلوم ہونا مناسب ہے کہ قائم ظِل میں کوئی خط منعدم نہیں ہوتا جیساکہ مخروطی ظِل میں ہوا کرتا ہے۔ مستوی س کا لاتناہی پر کا خط مستوی ش میں لاتناہی پر کے خط میں مظلل ہوتا ہے۔ یہ اِس واقعہ سے ظاہر ہے کہ مستوی ش کے ان نقطوں سے جو لاتناہی پر کے خط پر واقع ہیں اِس مستوی پر کے عمود مستوی س سے لاتناہی پر ملتے ہیں۔ (202)

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک قطع مکافی کا قائم ظِل دوسرا قطع مکافی ہوگا، ایک قطع زائد کا قائم ظِل دوسرا قطع زائد، اور ایک قطع ناقص کا قائم ظِل دوسرا قطع ناقص یا مخصوص صورتوں میں ایک دائرہ ہوگا۔

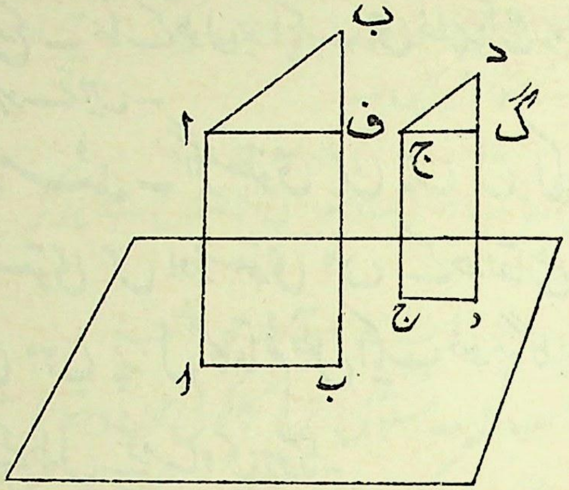
۲۰۲ ۔ قائم ظِل سے متعلق حسب ذیل مسئلے اہم ہیں۔

مسئلہ ۔ ایک خط مستقیم کا ظِل دوسرا خط مستقیم ہوگا۔

یہ اِس واقعہ سے ظاہر ہے کہ قائم ظِل مخروطی ظِل کی صرف ایک انتہائی صورت ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ مستوی ش کا وہ خط جو کسی خط ل کا ظِل ہو وہ خط ہوگا جس پر ل میں سے گذرنیوالا اور مستوی ش کے عمود وار مستوی س کو قطع کرتا ہے۔

۲۰۳ ۔ مسئلہ ۔ متوازی خطوط مستقیم متوازی خطوط مستقیم میں مظلل ہونگے اور ظِل کے خطوط کے طولوں میں وہی نسبت ہوگی جو ابتدائی خطوط کے طولوں میں ہے۔

فرض کرو کہ فضا میں اب اور جد دو خطوط ہیں جو ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔



(208) فرض کرو کہ مستوی س پر ان کے قائم ظل اب، ج د ہیں۔ اب اور ج د متوازی ہونے چاہئیں کیونکہ اگر بالفرض وہ ایک دوسرے سے نقطہ ن پر ملیں تو ن ایک ایسے نقطہ کا ظل ہوگا جو اب اور ج د میں مشترک ہوگا۔

اب اف اور ج گ علی الترتیب اب اور ج د کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ب ب اور د د سے ف اور گ پر ملتے ہیں۔ اب اب ف ایک متوازی الاضلاع ہے اور اس لئے اف = اب اور اسی طرح ج گ = ج د۔

اب چونکہ اب، ج د کے متوازی ہے اور اف، ج گ کے متوازی ہے (کیونکہ یہ علی الترتیب اب اور ج د کے متوازی ہیں اور اب اور ج د کا متوازی ہونا ہم ثابت کر چکے ہیں) اس لئے زاویہ ف اب = زاویہ گ ج د اور ف اور گ پر کے زاویے قائمہ ہیں

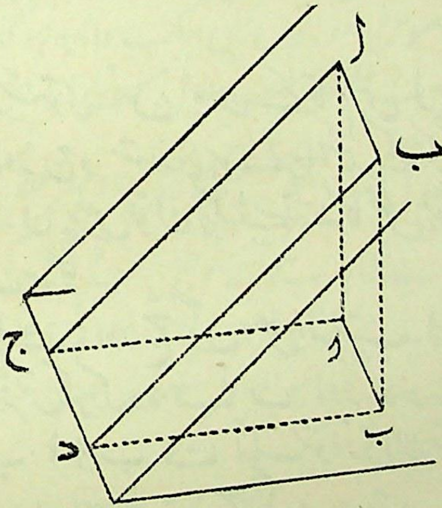
∴ △ اف ب، △ ج گ د کے متشابہ ہے۔

∴ اف : ج گ = اب : ج د

ا ب : ج د = ا ب : ج د

نتیجۂ صریح ۔ خط کے طول جو ایک ہی خط پر واقع ہوں اُسی نسبت میں تظلیل ہوتے ہیں۔

۲۰۴ ۔ **مسئلہ** ۔ اگر مستوی س میں ل ایک محدود خط ہو اور وہ مستوی س اور مستوی س کے خط تقاطع کے متوازی ہو تو مستوی س پر ل کا قائم ظِل ایک خط ہوگا جو ل کے متوازی اور اس کے طول کے مساوی ہوگا۔



فرض کرو کہ محدود خط ل، ا ب ہے اور اسکا ظِل ا ب ہے۔
س اور س کے خط تقاطع پر ا ج اور ب د عمود کھینچو۔ (204)
اب ا ج د ب ایک متوازی الاضلاع ہے۔
نیز چونکہ ا ا اور ب ب، س پر عمود ہیں اس لئے ج ا اور د ب، ج د پر عمود ہیں اور اس لئے وہ ایک دوسرے کے متوازی ہیں
نیز ▵ ا ج ا ≡ ▵ ب د ب

کیونکہ ا ج = ب د، ∠ ا ا ج = ∠ ب ب د

اور ∠ ا ج ا = ∠ ب د ب کیونکہ ا ج اور ج ا، ب د اور د ب کے متوازی ہیں۔

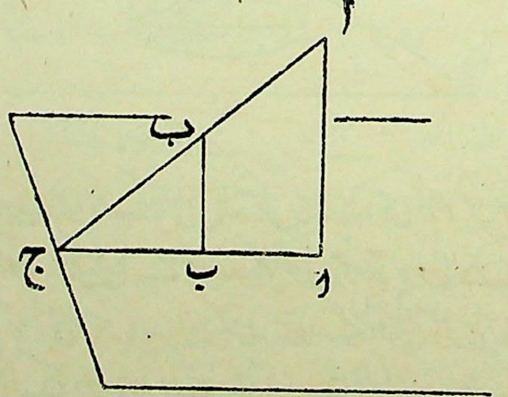
∴ ج ا = د ب

∴ ج د ب ا ایک متوازی الاضلاع ہے کیونکہ ج ا اور د ب متوازی ہیں۔

∴ ا ب = ج د = ا ب

۲۰۵ — مسئلہ — مستوی س کا کوئی محدود خط جو س اور س کے خط تقاطع پر عمود ہو ایک خط میں مظلل ہوگا جو اِس خط تقاطع پر عمود ہوگا اور جس کا طول ابتدائی خط کے طول کے ساتھ ایسی نسبت رکھیگا جو اِن مستویوں کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام کے مساوی ہوگی۔

فرض کرو کہ س اور س کے خط تقاطع پر ا ب عمود ہے اور فرض کرو اِس کا خط، خط تقاطع سے ج پر ملتا ہے۔



فرض کرو کہ ا ب کا قائم ظِل ا ب ہے۔

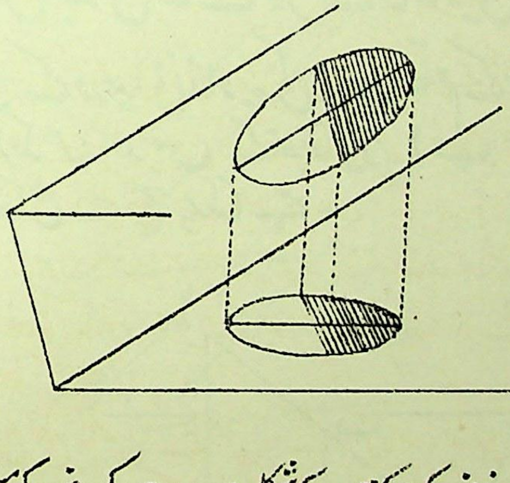
اب اور اَب، ج پر ملتے ہیں اور

اب : اَب = اج : اَج

= جم ا ج اَ

= جم (مستویوں س اور سَ کا درمیانی زاویہ)

(205) ۲۰۶ — مسئلہ — مستوی س پر کی کوئی بند شکل، مستوی سَ پر ایک بند شکل میں مظلل ہوگی جسکا رقبہ ابتدائی شکل کے رقبہ کے ساتھ ایسی نسبت رکھیگا جو مستویوں کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام کے مساوی ہوگی۔

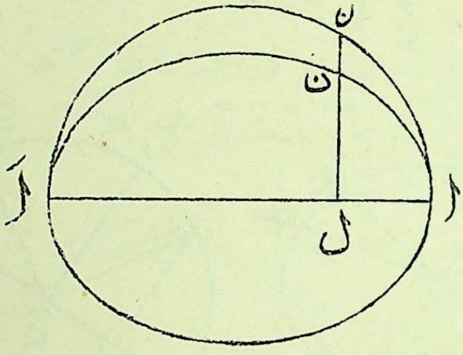


کیونکہ ہم یہ فرض کرسکتے ہیں کہ شکل بہت ہی کم عرض کی مستطیلی پٹیوں کی لاتناہی تعداد سے بنی ہے جن کے طول مستویوں س اور سَ کے خط تقاطع کے متوازی ہیں۔ اِن پٹیوں کے طول ظِل میں نہیں بدلتے لیکن عرض مستویوں کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام کی نسبت میں گھٹتے ہیں۔

۲۰۷ — قطع ناقص، ایک دائرہ کا قائم ظِل ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۱۵۰) کہ قطع ناقص اور اسکے امدادی دائرہ کے نظیری معین ایک دوسرے کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتے ہیں یعنی

ب ج : ا ج



اب فرض کرو کہ امدادی دائرہ کو محور اعظم ا اَ کے گرد اتنا گھمایا گیا ہے کہ وہ ایک ایسے مستوی میں آجاتا ہے کہ اس مستوی اور قطع ناقص کے مستوی کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام ب ج : ا ج ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ وہ خطوط جو قطع ناقص کے ہر نقطہ کو اُس نقطہ کے نئے محل سے جو امدادی دائرہ پر اس کے جواب میں ہے ملاتے ہیں قطع ناقص کے مستوی پر عمود ہونگے۔ (206)

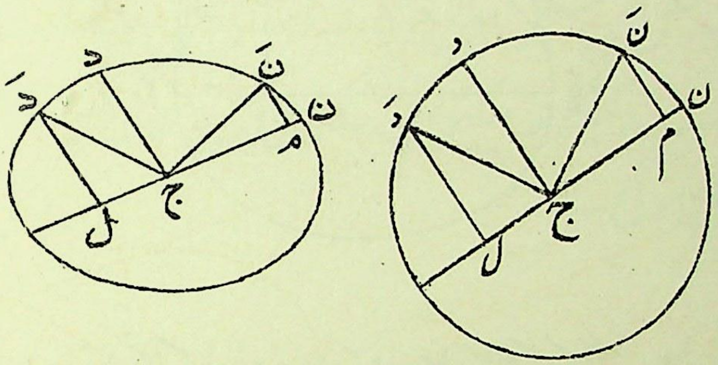
اس طرح قطع ناقص، نئے محل والے دائرہ کا قائم ظل ہے۔

اس لئے قطع ناقص کے بعض خواص دائرہ کے خواص سے قائم ظل کے ذریعہ اخذ کئے جا سکتے ہیں۔ ہم اس کی چند مثالیں دینگے۔

۲۰۸۔ مسئلہ۔ اگر قطع ناقص کے مزدوج نیم قطروں کا ایک زوج ج ن اور ج د ہو اور ایسا ہی دوسرا زوج ج نَ اور ج دَ ہو اور اگر ج ن پر معین نَ م اور دَ ل کھینچے جائیں تو

نَ م : ج ل = دَ ل : ج م = ج د : ج ن

فرض کرو کہ امدادی دائرہ کے نظیری نقطے چھوٹے حروف سے تعبیر کئے گئے ہیں اور امدادی دائرہ کو محور اعظم ا اَ کے گرد اتنا گھمایا گیا ہے کہ وہ قطع ناقص کے مستوی کے ساتھ زاویہ جم$^{-1}$ $\frac{\text{ب جَ}}{\text{ا ج}}$ بناتا ہے۔



اب ج ن اور ج د عمودی نصف قطر ہیں، اسی طرح ج نَ اور ج دَ بھی عمودی نصف قطر ہیں۔ نَ م اور دَ ل، ج د کے متوازی ہونیکی وجہ سے ج ن پر عمود ہونگے اور ہمیں حاصل ہوگا

△ ج م نَ = △ دَ ل ج

∴ نَ م : ج د = ج ل : ج ن

اور دَ ل : ج د = ج م : ج ن

∴ دفعہ ۲۰۳ کی رو سے

نَ م : ج د = ج ل : ج ن

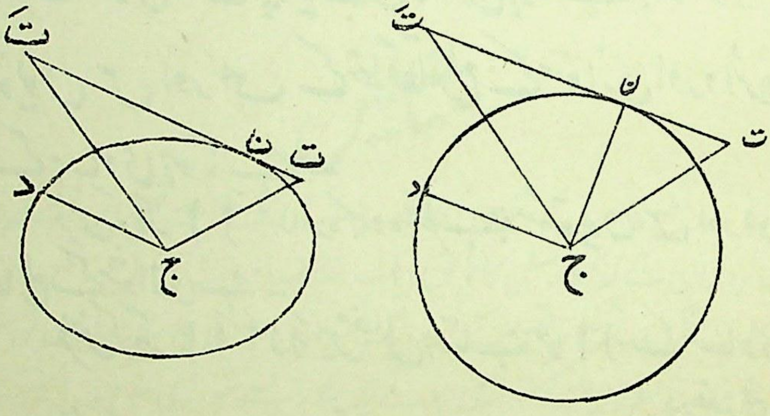
دَ ل : ج د = ج م : ج ن

∴ نَ م : ج ل = ج د : ج ن = دَ ل : ج م

۲۰۹ — مسئلہ — اگر قطع ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مزدوج (207)
قطروں کے کسی زوج سے ت اور تَ پر ملے اور ج د، ج ن کا
مزدوج ہو تو

ت ن × ن تَ = ج د^{2}

کیونکہ دائرہ کی نظیری شکل میں ج تَ اور ج ت علی القوائم ہیں اور
ج ن، ت تَ پر عمود ہے۔



∴ ت ن × ن تَ = ج ن^{2} = ج د^{2}

∴ ت ن : ج د = ج د : ن تَ

∴ ت ن : ج د = ج د : ن تَ

∴ ت ن × ن تَ = ج د^{2}

۲۱۰ — مسئلہ — قطع ناقص کا رقبہ جسکے نیم محور ج ا اور ج ب
ہوں π × ج ا × ج ب ہوتا ہے۔

کیونکہ قطع ناقص اپنے امدادی دائرہ کا قائم ظل ہے جبکہ دائرہ کو اتنا گھمایا جائے کہ وہ ناقص کے ساتھ زاویہ جم$^{-1}$ $\frac{\text{ب ج}}{\text{ا ج}}$ بنائے۔

∴ ناقص کا رقبہ : امدادی دائرہ کا رقبہ

= ب ج : ا ج (دفعہ ۲۰۶)

∴ ناقص کا رقبہ = π × ب ج × ا ج

۲۱۱ ـ مسئلہ ـ ایک مستوی س سے ایک دائرہ کا قائم ظل دوسرے مستوی س پر ایک قطع ناقص ہوتا ہے جسکا محور اعظم مستویوں س اور س کے خط تقاطع کے متوازی اور دائرہ کے قطر کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ا اَ دائرہ کا وہ قطر ہے جو مستویوں س اور س کے خط تقاطع کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ ا اَ، ا،اَ، میں مظلل ہوتا ہے جو ا اَ کے مساوی ہے۔ (دفعہ ۲۰۴)

فرض کرو کہ قطر ا اَ پر معین ن ل ہے اور اس کا ظل ن، ل، ہے۔ (208)

∴ ن، ل، = ن ل جم ع جہاں ع مستویوں س اور س کا درمیانی زاویہ ہے اور ن، ل، ا،اَ، پر عمود ہے (دفعہ ۲۰۵)

اب ن، ل،^{۲} : ا، ل، × ل، اَ، = ن ل^{۲} جم^{۲} ع : ا ل × ل اَ

= جم^{۲} ع : ۱

پس ن، کا طریق ایک قطع ناقص ہے جسکا محور اعظم ا اَ ہے اور محور اصغر = ا اَ جم ع۔

یہ آسانی کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے کہ خروج المرکز جب ع ہے۔

نتیجہ صریح ۱ — دو دائرے جو ایک ہی مستوی میں واقع ہوں متشابہ اور متشابہاً واقع دو قطعات ناقص میں قائم طور پر مظلل ہونگے۔ کیونکہ انکے خروج المرکز مساوی ہوں گے اور ایک کا محور اعظم دوسرے کے محور اعظم کے متوازی ہوگا کیونکہ ان میں سے ہر ایک محور اعظم مستویوں کے خط تقاطع کے متوازی ہونا چاہئے۔

نتیجہ صریح ۲ — دو متشابہ اور متشابہاً واقع قطعات ناقص ایک ساتھ دو دائروں کے قائم ظل ہوتے ہیں۔

مثالیں

۱ — قطع ناقص کے وتروں کا ایک سلسلہ ایک ثابت نقطے میں سے گذرتا ہے ثابت کرو کہ ان کے نقاط وسطی کا طریق ایک متشابہ اور متشابہاً واقع ناقص ہے۔

۲ — اگر ایک قطع ناقص کے اندر ایک متوازی الاضلاع بنایا جائے تو اس کے اضلاع مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں اور ایسے متوازی الاضلاع کا بڑے سے بڑا رقبہ ب ج × ا ج ہوتا ہے۔

۳ — اگر ایک قطع ناقص کا کوئی وتر ن ق ہو جو ج ن کے مزدوج قطر سے ت پر ملتا ہے تو ن ق × ن ت = ۲ ج $ر^2$ جہاں ج ر ن ق کے متوازی قطر ہے۔

۴ — اگر ایک قطع ناقص کا ایک متغیر وتر اپنے متوازی قطر کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھے تو وہ ایک دوسرے متشابہ ناقص کو مس کریگا جس کے محور ابتدائی ناقص کے محوروں پر ہونگے۔

۵ — وہ بڑے سے بڑا مثلث جو ایک قطع ناقص کے اندر بنایا جا سکتا ہے ایسا ہوتا ہے کہ اسکا ایک ضلع قطع ناقص کے ایک قطر سے تنصیف ہوتا ہے اور دوسرے

ضلع مزدوج قطر سے نقاط تثلیث پر منقطع ہوتے ہیں۔

۶ ۔ اگر ایک خط مستقیم دو ہم مرکز، متشابہ اور متشابہاً واقع قطعات ناقص سے ملے تو منحنیوں کے درمیان اِس خط مستقیم کے جو حصے قطع ہونگے وہ مساوی ہونگے۔

۷ ۔ مزدوج قطروں کے زوجوں کے سِروں پر کے مماسوں کے نقاط تقاطع کا طریق ایک ہم مرکز، متشابہ اور متشابہاً واقع قطع ناقص ہوتا ہے۔

۸ ۔ اگر ایک قطع ناقص کے مزدوج نیم قطر ج ن اور ج د ہوں اور ب ن اور ب د کو ملایا جائے اور ا د اور ا ن، و پر متقاطع ہوں تو شکل ب د و ن ایک متوازی الاضلاع ہوگی۔

۹ ۔ دو قطعات ناقص جنکے محور ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں چار نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مشترک وتروں کا کوئی زوج ایک محور کے ساتھ مساوی زاوئے بنائیگا۔

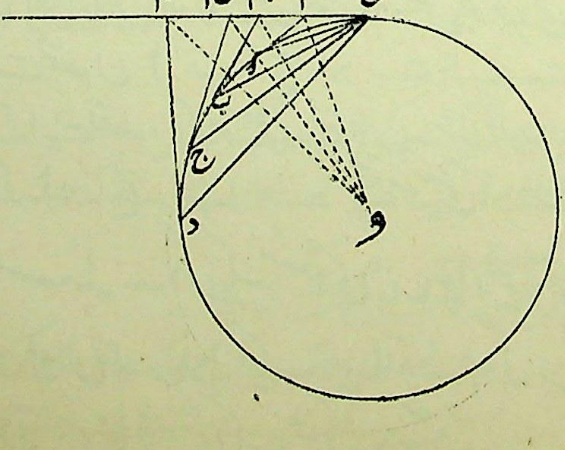
۱۰ ۔ ثابت کرو کہ ایک قطع ناقص کا کوئی دائرہ انحنا، اور خود قطع ناقص علی الترتیب ایک قطع ناقص اور اس کے ایک دائرہ انحناء میں قائم طور پر مظلل کئے جا سکتے ہیں۔

(210)

سولھواں باب

مخروطیوں کے چلیپہ نسبتی خواص

۲۱۲ — مسئلہ — اگر ایک مخروطی پر چار ثابت نقطے ا، ب، ج، د ہوں اور اِس پر ایک متغیر نقطہ ن ہو تو چلیپی نسبت ن(اب، جد) مستقل اور اُن چار نقطوں کی متناظر چلیپی نسبت کے مساوی ہوگی جن پر ا، ب، ج، د پر کے مماس ن پر کے مماس سے ملتے ہیں



مخروطی کو ایک دائرہ میں مُظلل کرو اور ظل میں متناظر چھوٹے حروف استعمال کرو۔ تب

ن (ا ب ج د) = ن (ا ب ج د)

لیکن ن (ا ب ج د) مستقل ہے کیونکہ زاوے ا ن ب، ب ن ج، ج ن د مستقل ہیں، یا اپنے تکملوں میں بدلتے ہیں جیسے ن دائرہ پر حرکت کرتا ہے۔ اس لئے ن (ا ب ج د) مستقل ہے۔

فرض کرو کہ ا۱، ب۱، ج۱، د۱ پر کے مماس ن پر کے مماس سے ا۱، ب۱، ج۱، د۱ پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے۔ (211)

اب و ا۱، و ب۱، و ج۱، و د۱ علی الترتیب ن ا، ن ب، ن ج، ن د پر عمود ہیں۔

∴ ن (ا ب ج د) = و (ا۱ ب۱ ج۱ د۱) = (ا۱، ب۱، ج۱، د۱)

∴ ن (ا ب ج د) = (ا۱ ب۱ ج۱ د۱)

نتیجہ صریح ۔ اگر مخروطی پر ا سے قریب ایک نقطہ اَ ہو تو

اَ (ا ب ج د) = ن (ا ب ج د)

∴ اگر ا پر کا مماس ا ت ہو تو

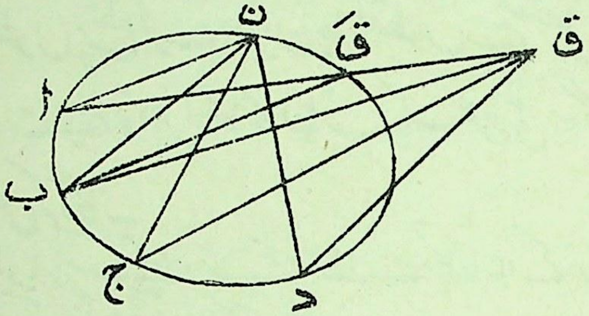
ا (ت ب ج د) = ن (ا ب ج د)

نوٹ ۔ اُس خاص صورت میں جبکہ وہ پنسل جو مخروطی پر کے کسی نقطہ ن کو چار ثابت نقطوں ا، ب، ج، د سے ملانے سے بنے موسیقی ہو تو ہم مخروطی پر کے ایسے نقطوں کو موسیقی کہتے ہیں۔ مثلاً اگر ن (ا ب ج د) = -۱ تو ہم کہتے ہیں کہ ا اور ج، ب اور د کے موسیقی مزدوج ہیں۔

۲۱۲ ۔ مسئلہ ۔ اگر ایک مستوی میں چار غیر ہم خط نقطے ا، ب، ج، د ہوں اور ن ایک ایسا نقطہ ہو کہ ن (ا ب ج د) مستقل ہے تو ن کا طریق ایک مخروطی ہو گا۔

فرض کرو کہ قَ ایک ایسا نقطہ ہے کہ

قَ (ا ب ج د) = ن (ا ب ج د)



اب اگر نقطوں ا، ب، ج، د، ن میں سے گذرنیوالا مخروطی ق میں سے نہ گذرے تو فرض کرو کہ وہ قَ اکو قَ پہ قطع کرتا ہے۔

∵ ن (ا ب ج د) = قَ (ا ب ج د) دفعہ ۲۱۳ کی رو سے

∵ قَ (ا ب ج د) = قَ (ا ب ج د)

اس لئے پنسلیں ق (ا، ب، ج، د) اور قَ (ا، ب، ج، د) ہم رسم ہیں اور ان میں شعاع ق قَ مشترک ہے۔

اس لئے (دفعہ ۶۴) وہ ہم محوارانہ منظرہ میں ہیں یعنی ا، ب، ج، د ہم خط ہیں۔ (212)

لیکن یہ مفروضہ کے خلاف ہے۔

اس لئے ا، ب، ج، د، ن میں سے گذرنے والا مخروطی ق میں سے گذرتا ہے۔

اس طرح ہمارا مسئلہ ثابت ہو چکا۔

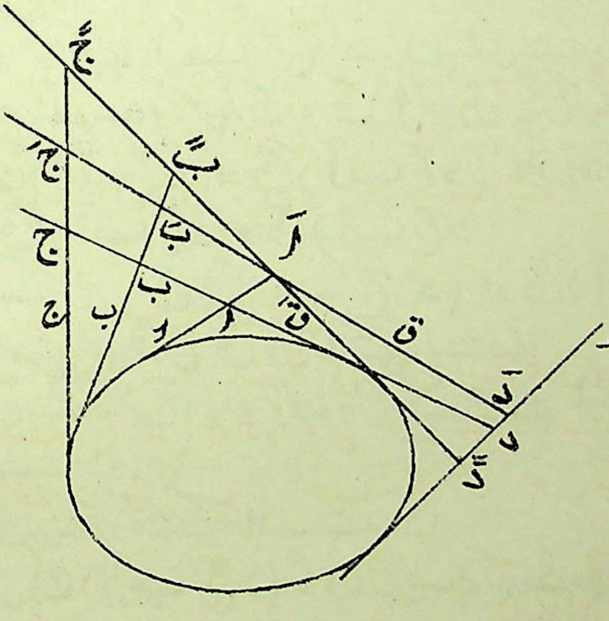
ہمیں اوپر سے معلوم ہوتا ہے کہ ہم ایک مخروطی کو جو پانچ نقطوں ا، ب، ج، د، ع میں سے گذرے ایک ایسے نقطہ ن کا طریق

سمجھ سکتے ہیں کہ

ن (ا ب ج د) = ع (ا ب ج د)

۲۱۴ ۔ اگر ایک متغیر خط چار ہم مستوی ثابت خطوط مستقیم کو جو ہم نقطہ نہوں چار نقطوں پر قطع کرے اور اِن چار نقطوں سے مستقل چلیپی نسبت کی ایک سمت بنے تو اِس خط کا لفاف ایک مخروطی ہوگا جو اِن چار خطوں کو مس کریگا۔

یہ مسئلہ بالراست پچھلے دفعہ کے مسئلہ سے مکافات کے ذریعہ جس کا ذکر ہم آئندہ باب میں کرینگے ماخوذ ہوسکتا ہے۔



حسب ذیل ثبوت مکافات کے اصول پر منحصر نہیں ہے۔

فرض کرو کہ خط ن، چار غیر ہم نقطہ خطوں ا، ب، ج، د کو نقطوں ا، ب، ج، د پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ (ا ب ج د) = دیا ہوا مستقل۔

(213) فرض کرو کہ خط ق، اُن ہی چار خطوں کو ایسے نقطوں اَ، بَ، جَ، دَ میں قطع کرتا ہے کہ

(اَ بَ جَ دَ) = (ا ب ج د)

اب اگر ق اُس مخروطی کا مماس نہیں ہے جو ا، ب، ج، د، ن کو مس کرتا ہے تو ق کے نقطہ اَ سے مخروطی کا ایک مماس قَ کھینچو۔

فرض کرو کہ خطوط ب، ج، د، مماس قَ کو نقطوں بً، جً، دً میں قطع کرتے ہیں۔

∴ (اَ بً جً دً) = (اَ ب ج د)، دفعہ ۲۱۲ کی رو سے
= (اَ بَ جَ دَ)

اس لئے سلسلتیں اَ بً جً دً اور اَ بَ جَ دَ ہم رسم ہیں اور وہ ایک متناظر مشترک نقطہ رکھتی ہیں۔

اس لئے وہ منظرہ میں ہیں (دفعہ ۶۰) جو ہمارے اس مفروضہ کے خلاف ہے کہ ا، ب، ج، د غیر ہم نقطہ ہیں۔

اس لئے ق اُسی مخروطی کو مس کرتا ہے جسے ا، ب، ج، د مس کرتے ہیں۔

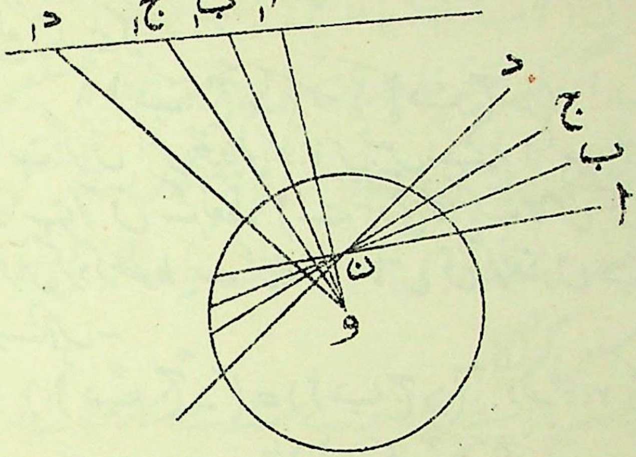
اس طرح مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۲۱۵۔ مسئلہ۔ اگر ایک مخروطی **س** کے مستوی میں ایک پنسل ن(ا، ب، ج، د) ہو اور مخروطی **س** کے لحاظ سے ن ا، ن ب، ن ج، ن د کے قطب ا$_1$، ب$_1$، ج$_1$، د$_1$ ہوں تو

ن (ا ب ج د) = (ا$_1$ ب$_1$ ج$_1$ د$_1$)

اسے صرف ایک دائرہ کی صورت میں ثابت کرنا کافی ہے کیونکہ مخروطی کو ایک دائرہ میں منظلل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے۔

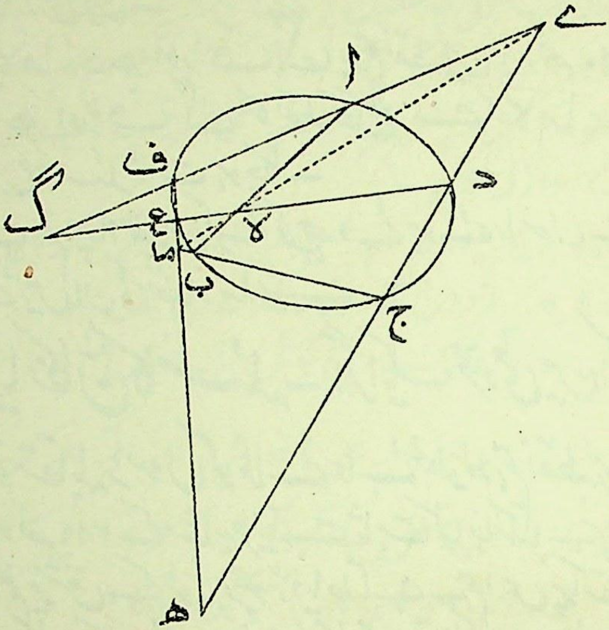


(214) ا ب و $ا_1$، و $ب_1$، و $ج_1$، و $د_1$ علی الترتیب ن ا، ن ب،
ن ج، ن د پر عمود ہیں۔

∴ ن (ا ب ج د) = و ($ا_1$ $ب_1$ $ج_1$ $د_1$) = ($ا_1$ $ب_1$ $ج_1$ $د_1$)

یہ مسئلہ مکافات کے اغراض کے لئے سب سے بڑی اہمیت رکھتا ہے۔ ہم قبل ازیں دیکھ چکے ہیں کہ نقطوں کی ایک سعت کے قطبی ایک پنسل بناتے ہیں۔ اب ہم دیکھتے ہیں کہ پنسل سعت کے ساتھ ہم رسم ہوتی ہے

۲۱۶ ۔ پیاسکال (Pascal) کا مسئلہ۔ اگر ایک مخروطی چھ نقطوں ا، ب، ج، د، ع، ف میں سے گذرے تو اُن ساٹھ مختلف مسدسوں (چھ ضلعی اشکال) میں سے جو اِن نقطوں سے بنائے جا سکتے ہیں ہر ایک مسدس کے متقابلہ اضلاع کے ازواج ہم خط نقطوں میں متقاطع ہونگے۔



اِس مسئلہ کو تطلیل کے ذریعہ ثابت کیا جا سکتا ہے (دیکھو مثال ۲۵ دسواں باب)۔ یا ہم اسے حسب ذیل طریقہ پر ثابت کر سکتے ہیں۔

اُس مسدس یا چھ ضلعی پر غور کرو جو اضلاع اب، ب ج، ج د، دع، ع ف، ف ا سے بنتا ہے۔

اضلاع کے زوج جو متقابلہ کہلاتے ہیں اب اور دع، ب ج اور ع ف، ج د اور ف ا ہیں۔ (215)

فرض کرو کہ یہ متقابلہ ازواج علی الترتیب لا، ما، ے پر ملتے ہیں۔

فرض کرو کہ ج د، ع ف سے ھ پر ملتا ہے اور دع، ف ا سے گ پر ملتا ہے۔

اب چونکہ ا(ب د ع ف) = ج (ب د ع ف)

∴ (لا د ع گ) = (ما ھ ع ف)

یہ ہم رسم سعتیں لا د ع گ اور ما ھ ع ف، ایک مشترک

متناظر نقطہ ع رکھتی ہیں۔

∴ لا ما، د ھ اور ف گ ہم نقطہ ہیں (دفعہ ۶۰)

یعنے د ھ اور ف گ کا نقطہ تقاطع ے، لا ما پر واقع ہے۔

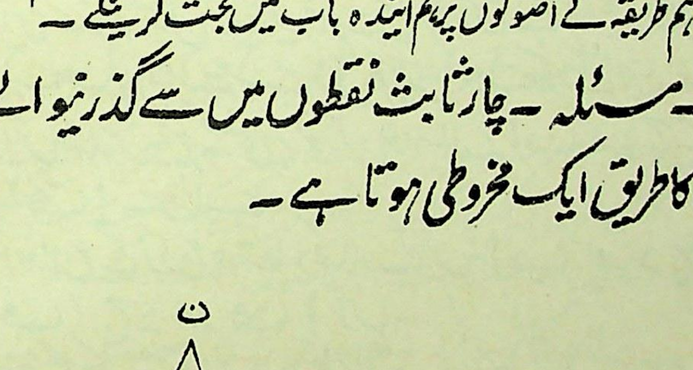
اس طرح مسئلہ ثابت ہو چکا۔

طالب علم اپنا اطمینان کرے کہ چھ دئے ہوئے راسوں سے جتنے مسدس بن سکتے ہیں ان کی تعداد ساٹھ ہے۔

۲۱۷ - بریانکان[ف] کا مسئلہ - اگر ایک مخروطی میں ایک مسدس بنایا جائے تو متقابلہ راسوں کو ملانے والے خطوط ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

اسے دفعہ ۲۱۶ کے مشابہ طریقہ سے ثابت کیا جا سکتا ہے چنانچہ اسکا ثبوت طالب علم پر مشق کے طور پر چھوڑ دیا جاتا ہے۔ ہم اس پر اکتفا کرینگے کہ اس مسئلہ کو پیاسکل کے مسئلہ سے بذریعہ مکافات اخذ کریں۔ علم ہندسہ جدید کے اس اہم طریقہ کے اصولوں پر ہم آئندہ باب میں بحث کرینگے۔

۲۱۸ - مسئلہ - چار ثابت نقطوں میں سے گذرنیوالے مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔



[ف] Brianchon.

(216)

فرض کرو کہ ایک مخروطی چار نقطوں ا، ب، ج، د میں سے گذرتا ہے اور اسکا مرکز و ہے
فرض کرو کہ اب، ب ج، ج د، د ا کے وسطی نقطے $م_{۱}$، $م_{۲}$، $م_{۳}$، $م_{۴}$ ہیں۔

$وم'_{۱}$، $وم'_{۲}$، $وم'_{۳}$، $وم'_{۴}$ علی الترتیب اب، ب ج، ج د، د ا کے متوازی کھینچو۔

اب $وم_{۱}$ اور $وم'_{۱}$، $وم_{۲}$ اور $وم'_{۲}$، $وم_{۳}$ اور $وم'_{۳}$، $وم_{۴}$ اور $وم'_{۴}$ مزدوج قطروں کے ازواج ہیں۔
اس لئے وہ ایک درپیچ پنسل بناتے ہیں

$$\therefore و(م_{۱}\,م_{۲}\,م_{۳}\,م_{۴}) = و(م'_{۱}\,م'_{۲}\,م'_{۳}\,م'_{۴})$$

لیکن بائیں جانب مستقل ہے کیونکہ $وم'_{۱}$، $وم'_{۲}$ وغیرہ مستقل سمتوں میں ہیں

$\therefore$ $و(م_{۱}\,م_{۲}\,م_{۳}\,م_{۴})$ مستقل ہے۔

$\therefore$ و کا طریق ایک مخروطی ہے جو $م_{۱}$، $م_{۲}$، $م_{۳}$، $م_{۴}$ میں سے گذرتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ وہ مخروطی جس پر و واقع ہے $م_{۵}$، $م_{۶}$ میں سے گذرتا ہے جو چارزاوئی کے دوسرے دو ضلعوں کے نقاط وسطی ہیں۔

کیونکہ اگر و کے پانچ محل $و_{۱}$، $و_{۲}$، $و_{۳}$، $و_{۴}$، $و_{۵}$ ہوں تو یہ پانچ نقطے ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں جو $م_{۱}$، $م_{۲}$، $م_{۳}$، $م_{۴}$ میں سے گذرتا ہے اور نیز ایک مخروطی پر جو $م_{۱}$، $م_{۲}$، $م_{۵}$، $م_{۶}$ میں سے گذرتا ہے۔

لیکن پانچ نقطوں میں سے صرف ایک مخروطی کھینچا جا سکتا ہے۔

اس لئے $م_{۱}$، $م_{۲}$، $م_{۳}$، $م_{۴}$، $م_{۵}$، $م_{۶}$ سب کے سب ایک مخروطی پر واقع ہیں جو و کا طریق ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ و کا طریق ن، ق، ر میں سے بھی گذرتا ہے

جو چار زاوئی کے وتروں کے نقاط تقاطع ہیں۔

کیونکہ دئے ہوئے ثابت چار نقطوں میں سے گذرنیوالے مخروطیوں میں سے ایک، خطوط اب اور جد کا زوج ہے اور اس مخروطی کا مرکز ن ہے۔

اسی طرح ق اور ر کے لئے۔

۲۱۹ - مسئلہ - اگر و{ا اَ ب بَ ج جَ} ایک دریچ پنسل ہو اور اگر و میں سے ایک مخروطی کھینچا جائے جو اِن شعاعوں کو ا، اَ، ب، بَ، ج، جَ پر قطع کرے تو وتر ااَ، ببَ، ججَ ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

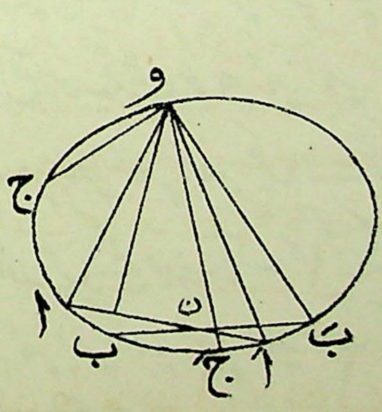
فرض کرو کہ ااَ اور ببَ، ن پر متقاطع ہوتے ہیں۔

مخروطی کی تظلیل ایک دائرہ میں اسطرح کرو کہ ن دائرہ کے مرکز میں متظلل ہو۔ ظل میں چھوٹے حروف استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا و اَ، ب و بَ علی القوائم ہیں کیونکہ وہ ایک نصف دائرہ میں ہیں۔

اس لئے وہ ایک قائم دریچ کی تعیین کرتے ہیں۔ (217)

∴ ج و جَ ایک قائمہ زاویہ ہے یعنی ججَ، ن میں سے گذرتا ہے۔

∴ ججَ، ن میں سے گذرتا ہے۔



یہ ذہن نشین رہے کہ نقاط ا اَ، ب بَ، ج جَ کو جب مخروطی پر کے کسی دوسرے نقطے سے ملایا جاتا ہے تو ان سے ایک درپیچ پنسل حاصل ہوتی ہے۔ اسکو دفعہ ۲۱۲ کے اطلاق سے فوراً اخذ کیا جا سکتا ہے۔

ایسے نقطوں کے کسی نظام کو مخروطی پر کی درپیچ سعت کہتے ہیں۔

نقطہ ن، جہاں نظیری وتر متقاطع ہوتے ہیں درپیچ کا قطب کہلاتا ہے

مثالیں

۱۔ اگر ایک مخروطی پر موسیقی نقطوں کے زوج (ن نَ)، (ق قَ) ہوں (دیکھو نوٹ دفعہ ۲۱۲) تو ثابت کرو کہ ن پر کا مماس اور ن نَ، ن ق اور ن قَ کے موسیقی مزدوج ہیں۔ اس لئے ثابت کرو کہ اگر ن پر کا عماد ن نَ ہو تو ن ق اور ن قَ، ن نَ کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں۔

۲۔ خط مستقیم ن نَ، ایک مخروطی کو ن اور نَ پر قطع کرتا ہے اور ن پر عماد ہے۔ خطوط مستقیم ن ق اور ن قَ، ن نَ کے ساتھ مساوی طور پر مائل ہیں اور مخروطی کو مکرر ق اور قَ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نَ ق اور نَ قَ، ن نَ اور ن پر کے مماس کے موسیقی مزدوج ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ اگر وہ پنسل جو مخروطی پر کے کسی نقطہ کو مخروطی پر کے کسی چار ثابت نقطوں سے ملانے سے بنتی ہے موسیقی ہے تو اس چار زاوئی کے دو ضلع جو ان چار ثابت نقطوں سے بنتا ہے مخروطی کے لحاظ سے ایک دوسرے کے مزدوج ہیں

(218) ۴۔ ایک قطع زائد کے کسی نقطہ ن پر کا مماس متقاربوں سے $\text{م}_{۱}$ اور $\text{م}_{۲}$ پر متقاطع ہوتا ہے اور راسوں پر کے مماسوں سے $\text{ل}_{۱}$ اور $\text{ل}_{۲}$ پر متقاطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ن م}_{۱}^{۲} = \text{ن ل}_{۱} \times \text{ن ل}_{۲}$$

۵۔ پیاسکال کے مسئلہ سے ثابت کرو کہ اگر ایک مخروطی ایک مثلث کے

راسوں میں سے گذرے تو اِن نقطوں پر کے مماس متقابلہ اضلاع سے ہم خط نقطوں پر ملیں گے ۔

[مخروطی میں ایک مسدّس ا اَ ب بَ ج جَ ایسا لو کہ اَ، بَ، جَ راسوں ا، ب، ج کے قریب ہوں ۔]

۶ ۔ ایک قطع زائد کے تین نقطے اور دونوں متقاربوں کی سمتیں دی گئی ہیں ۔ وہ نقطہ تقاطع معلوم کرو جہاں ایک دیا ہوا خط جو ایک متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہے منحنی کو قطع کرتا ہے ۔

۷ ۔ مخروطی پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو مخروطی کو مکرر نقطہ ن پر اور ایک دئے ہوئے اندرونی مثلث کے ضلعوں کو نقطوں اَ، بَ، جَ پر قطع کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ (ن اَ بَ جَ) مستقل ہے ۔

۸ ۔ ایک قطع زائد پر کوئی چار نقطے ا، ب، ج، د ہیں، ج ک جو ایک متقارب کے متوازی ہے ا د سے ک پر ملتا ہے اور د ل جو دوسرے متقارب کے متوازی ہے ج ب سے ل پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ک ل، ا ب کے متوازی ہے ۔

۹ ۔ پیاسکل کے اُن ساٹھ خطوط میں سے جو مخروطی پر کے چھ نقطوں کے جواب میں ہوتے ہیں تین تین ایک ہی نقطہ میں متقاطع ہوتے ہیں ۔

۱۰ ۔ ایک قطع زائد پر جس کے متقارب ج ا اور ج ب ہیں کوئی دو نقطے د اور ع لئے گئے ہیں ۔ د اور ع میں سے گذرنے والے اور ج ا اور ج ب کے متوازی خطوط ق پر ملتے ہیں ۔ د پر کا مماس، ج ب سے ر پر ملتا ہے اور ع پر کا مماس، ج ا سے ت پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ت، ق، ر ہم خط نقطے ہیں جو د ع کے متوازی خط پر واقع ہیں ۔

۱۱ ۔ ایک مخروطی کے نقطوں ا اور ب پر کے مماس ج ا اور ج ب ہیں اور مخروطی پر دوسرے نقطے د اور ع ہیں ۔ خط ج د، ا ب کو گ پر، ا ع کو ھ پر، اور ب ع کو ک پر قطع کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ج د}^2 : \text{گ د}^2 = \text{ج ھ} \times \text{ج ک} : \text{گ ھ} \times \text{گ ک}$$

۱۲ — ایک مخروطی پر کے ایک ثابت نقطہ ا میں سے دو ثابت خطوط مستقیم اع، اعَ کھینچے گئے ہیں، مخروطی پر س اور سَ دو ثابت نقطے ہیں اور ن ایک متغیر نقطہ ہے۔ ن س اور ن سَ، اع اور اعَ سے علی الترتیب ق اور قَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق قَ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے

۱۳ — اگر دو مثلث متناظرہ میں ہوں تو اِن کے غیر نظیری ضلعوں کے چھ نقاط تقاطع ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں اور مناظرہ کا محور اِن چھ نقطوں کے پیاسکال خطوں میں سے ایک ہوتا ہے۔

(219) ۱۴ — اگر مخروطی پر کے ایک ثابت نقطہ ن میں سے مخروطی کے دو وتر ن ق اور ن قَ، ن پر کے مماس کے ساتھ مساوی طور پر مائل ہوں تو وتر ق قَ ایک ثابت نقطہ میں سے گذریگا۔

۱۵ — اگر خطوط اب، ب ج، ج د، د ا، ایک مخروطی کو علی الترتیب ن، ق، ر، س پر مس کریں تو ثابت کرو کہ مسدسات ا ن ق ج ر س اور ب ق ر د س ن میں مخروطی کھینچے جا سکتے ہیں۔

۱۶ — ایک قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا مماس امدادی دائرہ سے ما اور مَا پر ملتا ہے۔ ا س سَ اَ محور اعظم ہے اور س ما اور سَ مَا، اسکوں سے عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطوں ا، ما، مَا، اَ سے دائرہ پر کے کسی نقطہ تک کھینچے ہوئے خطوط ایک ایسی پنسل بناتے ہیں جسکی چلیپی نسبت، ن کے محل پر منحصر نہیں ہوتی۔

۱۷ — اگر ایک دائرہ پر ا اور ب دئے ہوئے نقطے ہوں اور ج د ایک دیا ہوا قطر ہو تو دریافت کرو کہ دائرہ پر ایک ایسا نقطہ ن کس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے کہ ن ا اور ن ب، ج د کو اُن نقطوں پر قطع کریں جو مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں۔

(220)

ستر ہواں باب

مکافات

۲۲۰ — اگر ایک مستوی میں متعدد نقطے ن، ق، ر وغیرہ ہوں اور اس مستوی میں ایک مخروطی ح کے لحاظ سے ان نقطوں کے قطبی ن، ق، ر ہوں تو جیسا کہ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں وہ خط جو کسی دو نقطوں ن اور ق کو ملاتا ہے بلحاظ خ کے نظیری خطوں ن اور ق کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہوگا۔

خطوں ن اور ق کے نقطہ تقاطع کو علامت (ن ق) سے اور نقطوں ن اور ق کو ملانے والے خط کو علامت (ن ق) سے تعبیر کرنے میں سہولت ہوگی۔

نقطہ ن، خط ن کا جواب اس مفہوم میں ہے کہ ن، ن کا قطب ہے۔ اسی طرح خط (ن ق)، نقطہ (ن ق) کا جواب اس مفہوم میں ہے کہ ن ق، (ن ق) کا قطبی ہے۔

مثلاً اگر ف ایک شکل ہو جو نقطوں اور خطوں کے ایک اجتماع پر مشتمل ہے تو اس کے جواب میں ایک شکل ف ملے گی جو خطوں اور نقطوں پر مشتمل ہوگی۔ دو ایسی شکلیں ایک دوسرے کے لحاظ سے **متکافی شکلیں** کہلاتی ہیں۔ انکی مکافات کا واسطہ مخروطی ح ہے۔

دفعہ ۲۱۵ استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ف میں نقطوں کی

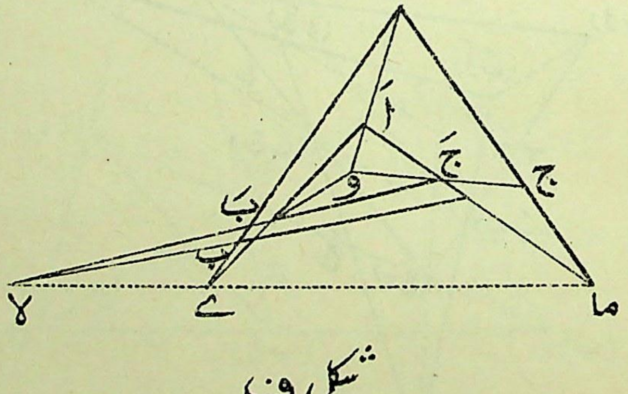
کسی سعت کے جواب میں فَ میں خطوں کی ایک پنسل جو سعت کے ساتھ ہم رسم ہے حاصل ہوتی ہے۔

(221) ۲۲۱ — تناظر کے اصول کی مدد سے جسکی تعریف پچھلے دفعہ میں کیگئی ہے ایک شکل کی ایک معلومہ خاصیت سے ایک اور شکل کی دوسری خاصیت اخذ کیجا سکتی ہے جہاں قبل الذکر شکل نقطوں اور خطوں پر مشتمل ہے اور بعد الذکر خطوں اور نقطوں پر۔

ان میں سے ایک خاصیت کو دوسری کا متکافی کہتے ہیں اور ایک خاصیت سے دوسری تک جانیکے عمل کو **مکافات** کہتے ہیں۔

اب ہم اس کی مثالیں دینگے۔

۲۲۲ — ہم جانتے ہیں کہ اگر دو مثلثوں ا ب ج، اَ بَ جَ کے راس منظرہ میں ہوں تو نظیری اضلاع کے ازواج (ب ج) (بَ جَ)، (ج ا) (جَ اَ) اور (ا ب) (اَ بَ) ہم خط نقطوں لا، ما، ے پر متقاطع ہوتے ہیں۔



شکل ف

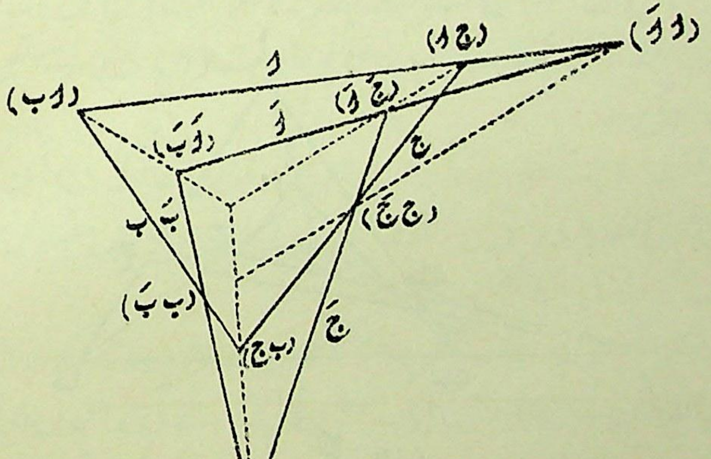
اگر ہم مثلث ا ب ج کے راسوں کے جواب میں متکافی شکل کھینچیں تو تین خط ا، ب، ج حاصل ہونگے جن سے ایک مثلث بنیگا جس کے راس (ب ج)، (ج ا)، (ا ب) ہونگے۔ علیٰ ہذا مثلث اَ بَ جَ کیلئے۔

شکل ف میں خطوط (ا اَ)، (ب بَ)، (ج جَ) ہم نقطہ ہیں اور اس کے جواب میں شکل فَ میں نقطے (ا اَ)، (ب بَ)، (ج جَ) ہم خط ہوں گے۔

شکل ف میں خطوں کے ازواج (ب ج) (بَ جَ)، (ج ا) (جَ اَ) (ا ب) (اَ بَ) کے نقاط تقاطع ہم خط ہیں اور اس کے جواب میں شکل فَ میں نقطوں کے ازواج (ب ج) (بَ جَ)، (ج ا) (جَ اَ)، (ا ب) (اَ بَ) کو ملانے والے خطوط ہم نقطہ ہونگے۔ (222)

پس شکل ف کے مسئلہ کی مکافات حسب ذیل مسئلہ ہوتی ہے۔

اگر دو مثلث جنکے اضلاع علی الترتیب ا ب ج، اَ بَ جَ ہیں ایسے ہوں کہ نظیری اضلاع کے تین نقاط تقاطع ہم خط ہیں تو نظیری راسوں کو ملانیوالے خطوط یعنی (ا ب) اور (اَ بَ)، (ب ج) اور (بَ جَ)، (ج ا) اور (جَ اَ) ہم نقطہ ہونگے۔



شکل فَ

یہ دو تکافی مسئلے ایک دوسرے کے ساتھ حسب ذیل طریقہ پر بیان ہو سکتے ہیں

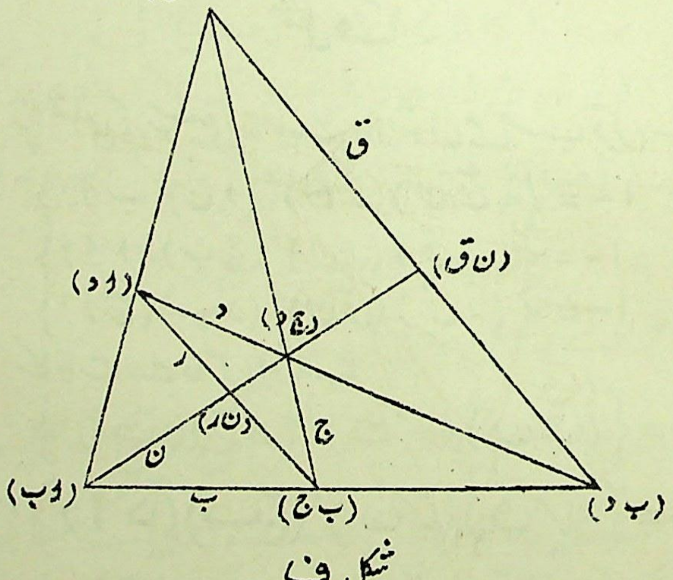
مثلثات جو منظرہ میں ہوں ہم محور ہوتے ہیں۔	ہم محور مثلثات منظرہ میں ہوتے ہیں۔

طالب علم بلا شبہ اس حقیقت سے آگاہ ہو چکا ہو گا کہ ایک مثلث جیسے تین خطوں سے بنا ہوا سمجھا گیا ہے دوسرے مثلث میں جیسے تین خطوں سے بنا ہوا سمجھا گیا ہو متکافی نہیں ہوتا بلکہ ایک ایسے مثلث میں متکافی ہوتا ہے جیسے تین نقطوں سے بنا ہوا سمجھا گیا ہو، اور اسی طرح اس کے برعکس۔

۲۲۳ — اب ہم چار ضلعی کی موسیقی خاصیت اور چار زاوئی کی موسیقی خاصیت کو مکافات کے ذریعہ باہم مربوط کرینگے۔

فرض کرو کہ چار ضلعی کے خطوط ا، ب، ج، د ہیں اور ان کے جواب میں چار زاوئی کے نقطے ا، ب، ج، د ہیں۔

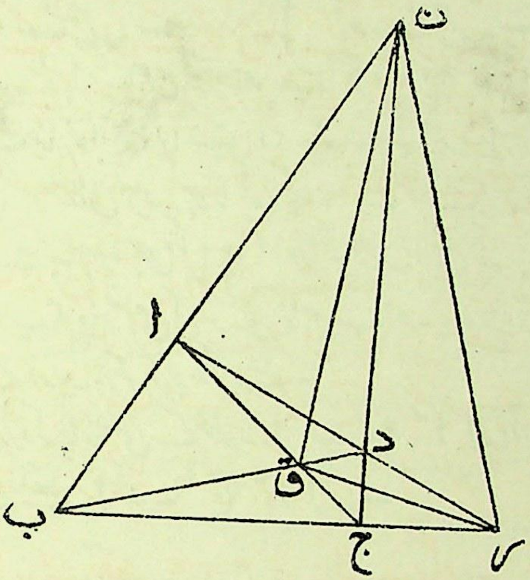
(228)



شکل ف

فرض کرو کہ (ا ب) اور (ج د) کو ملانیوالا خط ن ہے۔
״ ״ (ا ج) اور (ب د) ״ ق ہے۔

فرض کرو کہ (ا د) اور (ب ج) کو ملانیوالا خط ر ہے۔



شکل ف

(224) چار ضلعی کی موسیقی خاصیت علامتوں میں حسب ذیل ہے:

{ (ا ب) (ج د)، (ن ر) (ن ق) } = -۱
{ (ا د) (ب ج)، (ن ر) (ق ر) } = -۱
{ (ا ج) (ب د)، (ن ق) (ق ر) } = -۱

مکافات سے حاصل ہوتا ہے

{ (ا ب) (ج د)، (ن ر) (ن ق) } = -۱

{ (ا د) (ب ج)، (ن ر) (ق ر) } = -۱

{ (ا ج) (ب ج)، (ن ق) (ق ر) } = -۱

اس لئے چار زاوئی کی حسب ذیل موسیقی خاصیت معلوم ہوتی ہے: ہر راس پر وتری مثلث کے دو ضلع، چار زاوئی کے اُن دو ضلعوں کے

ساتھ موسیقی مزدوج ہوتے ہیں جو اس راس میں سے گذرتے ہیں۔

طالب علم کو اب یہ معلوم ہوگا کہ کسی چار زاوئی کے "وتری نقطے" اُس چار ضلعی کے وتروں کے متکافی ہوتے ہیں جس سے چار زاوئی اخذ کیا گیا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ اصطلاح "وتری نقطے" اختیار کی گئی ہے۔

۲۲۴ — مسئلہ۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے کسی دریپیچ سعت کا متکافی ایک دریپیچ پنسل ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ایک خط ن پر دریپیچ سعت

ا، ا$_1$، ب، ب$_1$، ج، ج$_1$ وغیرہ ہے۔

مکافات سے جو پنسل حاصل ہوگی وہ ا، ا$_1$، ب، ب$_1$، ج، ج$_1$ وغیرہ ہوگی اور یہ پنسل ایک نقطہ ن میں سے گذرے گی۔

نیز (ا ب ج ا$_1$) = (ا ب ج ا$_1$)

اور (ا ب$_1$ ج$_1$ ا$_1$) = (ا ب$_1$ ج$_1$ ا)، دفعہ ۲۱۵ کی رو سے

لیکن (ا ب ج ا$_1$) = (ا ب$_1$ ج$_1$ ا)، دفعہ ۸، کی رو سے

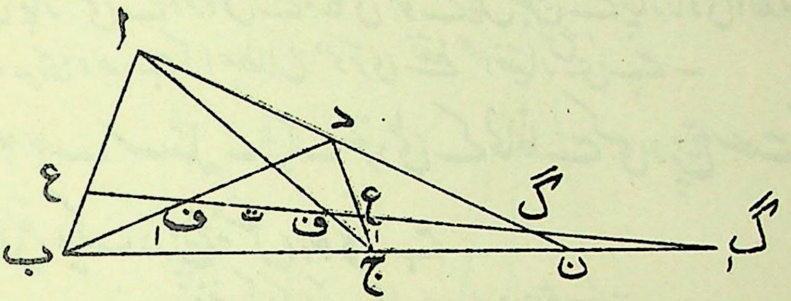
∴ (ا ب ج ا$_1$) = (ا ب$_1$ ج$_1$ ا$_1$)

اس لئے یہ پنسل دریپیچ میں ہے۔

۲۲۵ — چار زاوئی اور چار ضلعی کی دریپیچ خاصیت۔

مسئلہ۔ کوئی قاطع ایک چار زاوئی کے متقابلہ اضلاع کے ازواج کو ایسے نقطوں کے زوجوں پر قطع کرتا ہے جو دریپیچ میں ہوتے ہیں۔

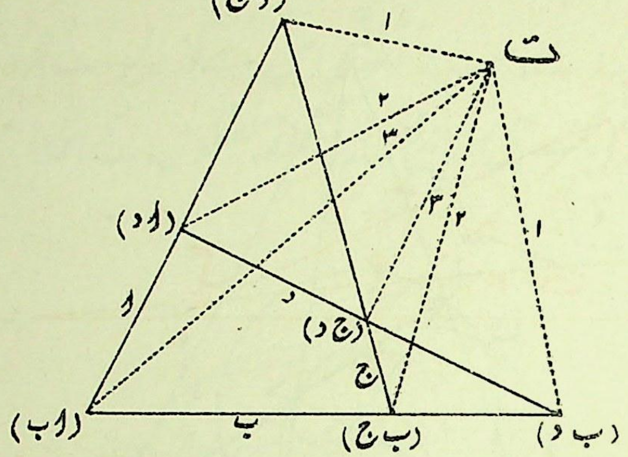
(225) فرض کرو کہ چارزاوئی ا ب ج د ہے (دفعہ ۷۶)۔



فرض کرو کہ قاطع ت
متقابلہ اضلاع کے زوج اب، ج د کو ع، ع$_1$ پر قطع کرتا ہے
،، ،، ،، اج، ب د کو ف، ف$_1$ ،، ،،
،، ،، ،، اد، ب ج کو گ، گ$_1$ ،، ،،
فرض کرو کہ اد اور ب ج نقطہ ن پر ملتے ہیں

اب (گ ع ف گ$_1$) = ا(گ ع ف گ$_1$)
= (ن ب ج گ$_1$)
= د(ن ب ج گ$_1$)
= (گ ف$_1$ ع$_1$ گ$_1$)
= (گ$_1$ ع$_1$ ف$_1$ گ)، حرفوں کو
آپس میں دو دو کرکے بدلنے سے۔

اِس لئے ع، ع$_1$، ف، ف$_1$، گ، گ$_1$ اُسی درپیچ سے متعلق ہیں۔



مسئلہ بالا کی مکافات سے حسب ذیل دوسرا مسئلہ حاصل ہوتا ہے: (226)

وہ خطوط جو کسی نقطہ کو ایک مکمل چار ضلعی کے متقابلہ راسوں کے ازواج سے ملاتے ہیں ایک درپیچ پنسل بناتے ہیں۔

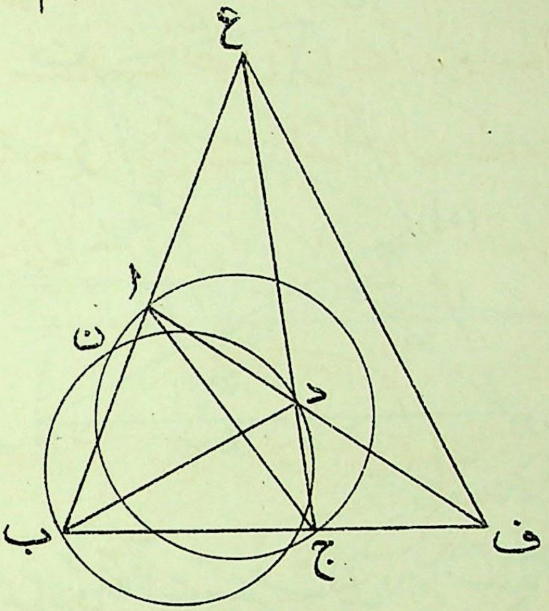
مثلاً ہماری شکل میں اگر ت کو جو قاطع ت کے جواب میں ہے راسوں کے متقابلہ ازواج (ا ج) (ب د)، (ا د) (ب ج)، (ا ب) (ج د) سے ملایا جائے تو ایک درپیچ پنسل حاصل ہوتی ہے۔

۲۲۶ ـ مسئلہ ـ وہ دائرے جو ایک مکمل چار ضلعی کے وتروں پر بنائے جائیں ہم محور ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ چار ضلعی کے اضلاع اب، ب ج، ج د، د ا ہیں۔ وتر اج، ب د، ع ف ہیں۔

فرض کرو کہ اج اور ب د کو قطر مانکر دائرے کھینچے گئے ہیں اور ان دائروں کا ایک نقطہ تقاطع ن ہے۔

∴ ان ج اور ب ن د علی القوائم ہیں۔



لیکن ن ا، ن ج، ن ب، ن د، ن ع، ن ف درپیچ میں ہیں (دفعہ ۲۲۵)۔

∴ دفعہ ۸۶ کی رو سے زاویہ ع ن ف ایک قائمہ زاویہ ہے۔

∴ ع ف کو قطر مانکر کھینچا ہوا دائرہ ن میں سے گذرتا ہے۔

اسی طرح ع ف پر کا دائرہ، ب د اور ا ج پر کے دائروں کے دوسرے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ (227)

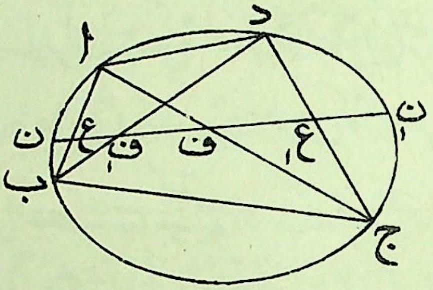
یعنے یہ تین دائرے ہم محور ہیں۔

نتیجہ صریح — چار ضلعی کے تین وتروں کے نقاط وسطی ہم خط ہوتے ہیں۔ یہ اہم اور مشہور خاصیت فوراً ماخوذ ہوتی ہے کیونکہ یہ تین وسطی نقطے تین ہم محور دائروں کے مرکز ہیں۔

وہ خط جو اِن تین وسطی نقطوں میں سے گذرتا ہے بعض اوقات چار ضلعی کا قطر کہلاتا ہے۔

۲۲۷ ـ ڈیسارگ کا مسئلہ۔

چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرنیوالے مخروطی کسی قاطع سے، ایک ہی درپیچ سے متعلقہ نقطوں کے ازواج میں منقطع ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ چار نقطوں ا، ب، ج، د میں سے گذرنیوالے ایک مخروطی کو قاطع ت نقطوں ن اور ن۱ پر قطع کرتا ہے۔
فرض کرو کہ یہی قاطع چار زاوئی کے متقابلہ اضلاع کے دو زوجوں اب، ج د؛ اج، ب د کو ع، ع۱ اور ف، ف۱ پر قطع کرتا ہے۔

اب

(ن ع ف ن۱) = ا(ن ع ف ن۱)

= ا(ن ب ج ن۱)

= د(ن ب ج ن۱) حسب دفعہ ۲۱۲

= (ن ف۱ ع۱ ن۱)

= (ن۱ ع۱ ف۱ ن) حرفوں کو دو دو کرکے باہم تبدیل کرنے سے

∴ ن، ن۱ اُس درپیچ سے متعلق ہیں جو ع، ع۱ اور ف، ف۱

سے متعین ہوتا ہے۔

(228) اِس لئے ا ب ج د میں سے گذرنیوالے تمام مخروطی قاطعات کو ایک ہی درپیچ سے متعلقہ نقطوں کے ازواج میں قطع کرینگے۔

نوٹ۔ دفعہ ۲۲۵ کا مسئلہ ڈیسارگ کے مسئلہ کی صرف ایک خاص صورت ہے اگر دو خطوں اد، ب ج کو اِن چار نقطوں میں سے گذرنیوالے مخروطیوں میں سے ایک مخروطی سمجھا جائے۔

۲۲۸۔ ڈیسارگ کے مسئلہ کا مکافی حسب ذیل مسئلہ ہے

اگر مخروطی چار دئے ہوئے خطوں کو مس کریں تو اِن کے مُستوی کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے مخروطیوں کے مماسوں کے زوج ایک ہی درپیچ پنسل سے متعلق ہوتے ہیں یعنے اُس پنسل سے جو اِن چار خطوں سے بننے والے چار ضلعی کے متقابلہ راسوں کے زوجوں کو متذکرہ بالا نقطہ کے ساتھ ملانیوالے خطوں سے متعین ہوتی ہے۔

۲۲۹۔ مکافات کا اطلاق مخروطیوں پر۔

اب ہم یہ سمجھائینگے کہ مکافات کا اصول کس طرح مخروطیوں پر استعمال کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ نقطہ ن، مخروطی خ کے مُستوی میں ایک منحنی س مرتسم کرتا ہے تو خط ن جو مخروطی خ کے لحاظ سے ن کا قطبی ہے کسی منحنی کو لف کریگا جسے ہم سَ سے تعبیر کرینگے۔

پس سَ کے مماس، س پر کے نقطوں کا جواب ہیں، لیکن یہ بھی ذہن نشین رہے کہ س کے مماس، سَ پر کے نقطوں کا جواب ہونگے۔

کیونکہ فرض کرو کہ س پر دو قریبی نقطے ن اور نَ ہیں اور فرض کرو کہ

اُنکے جواب میں خطوط ن اور نَ ہیں۔ تو نقطہ (ن نَ) خط (ن نَ) کا جواب ہے
اب جیسے نَ، ن تک حرکت کرتا ہے (ن نَ) منحنی س کے نقطہ ن پر کا مماس بن جاتا ہے اور اسی اثناء میں (ن نَ) اپنے لفاف کا نقطہ تماس بن جاتا ہے۔

اسلئے س کے مماسوں کے جواب میں سَ پر کے نقطے ہیں۔

منحنیوں س اور سَ میں سے ہر ایک کو مخروطی خ کے لحاظ سے دوسرے منحنی کا قطبی متکافی کہتے ہیں۔

۲۳۰۔ مسئلہ۔ اگر س ایک مخروطی ہو تو سَ دوسرا مخروطی ہوگا۔

فرض کرو کہ س پر چار ثابت نقطے ا، ب، ج، د ہیں اور اسی منحنی پر ن کوئی اور نقطہ ہے۔

تب ن (ا ب ج د) مستقل ہے۔ (229)

لیکن ن (ا ب ج د)

= {(ن ا)(ن ب)(ن ج)(ن د)} حسب دفعہ ۲۱۵

∴ {(ن ا)(ن ب)(ن ج)(ن د)} مستقل ہے۔

∴ ن کا لفاف ایک مخروطی ہے جو ا، ب، ج، د کو مس کرتا ہے (دفعہ ۲۱۴)

∴ سَ ایک مخروطی ہے۔

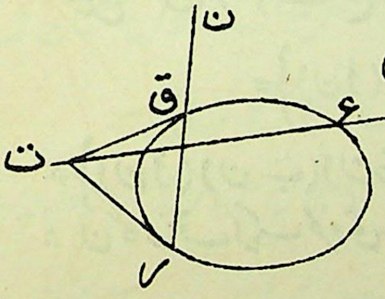
اِس اہم مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:۔
س ایک مخروطی ہونے کی وجہ سے دوسرے رتبہ کا ایک منحنی ہے یعنی اس کے مستوی میں کے خطوط مستقیم اُسکو دو اور صرف دو نقطوں پر قطع کرتے ہیں خواہ یہ نقطے حقیقی ہوں یا خیالی۔

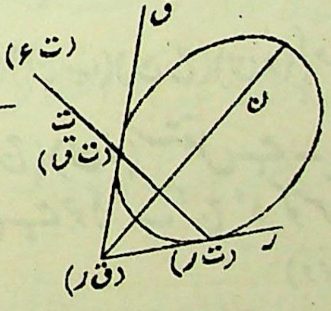
اس لئے سَ دوسری جماعت (Class) کا ایک منحنی ہونا چاہئے یعنی ایسا منحنی کہ اس کے مستوی میں کے ہر نقطہ سے اس کے دو اور صرف دو مماس کھینچے جا سکتے ہوں۔ اسلئے سَ ایک مخروطی ہے

۲۳۱ - مسئلہ - اگر س اور سَ دو مخروطی ہوں جو مخروطی خ کے لحاظ سے ایک دوسرے کے متکافی ہیں تو س کا قطب اور قطبی، سَ کے قطبی اور قطب کا جواب ہوتے ہیں اور اس کے بالعکس۔

فرض کرو کہ س کا قطب اور قطبی علی الترتیب ن اور ت ع ہیں

[طالب علم کے لئے یہ ذہن نشیں کر لینا نہایت اہم ہے کہ ت ع س کے لحاظ سے ن کا قطبی ہے نہ کہ خ کے لحاظ سے۔ خ کے لحاظ سے ن کا قطبی وہ خط ہے جسے ہم ن سے تعبیر کرتے ہیں]





فرض کرو کہ س کا کوئی وتر ق ر ہے جو ن میں سے گذرتا ہے تو ق اور ر پر کے مماس خط ت ع پر ملینگے۔ فرض کرو کہ وہ نقطہ ت پر ملتے ہیں۔

اس لئے متکافی شکل میں ن اور (ت ع) اس طور پر مربوط ہونگے کہ

اگر ن پر کوئی نقطہ (ق ر) لیا جائے تو (ق ر) سے سَ کے مماسوں کا وترِ تماس ت، (ت ع) میں سے گذریگا۔

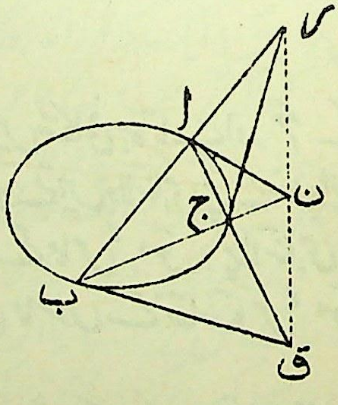
∴ ن اور (ت ع)، سَ کے لحاظ سے قطبی اور قطب ہیں۔

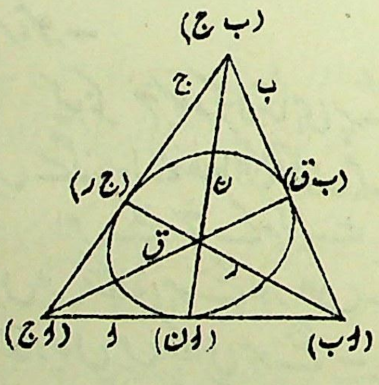
نتیجہ صریح ۔ س کے مزدوج نقطوں کے متکافی، سَ کے مزدوج خطوط ہوتے ہیں اور اس کے بالعکس۔ (280)

نتیجہ صریح ۲۔ س کے ایک خود مزدوج مثلث کا متکافی، سَ کا ایک خود مزدوج مثلث ہوتا ہے۔

۲۳۲۔ اب ہم چند متکافی مسئلے متوازی ستونوں میں بیان کرینگے۔

۱۔ اگر ایک مثلث (تین ضلعی شکل) میں ایک مخروطی بنایا جائے تو مثلث کے راسوں کو متقابلہ اضلاع کے نقاط تماس سے ملانیوالے خطوط ہم نقطہ ہوتے ہیں۔	آ۔ اگر ایک مثلث (تین نقطی شکل) کے گرد ایک مخروطی کھینچا جائے تو مثلث کے اضلاع اور متقابلہ راسوں پر کے مماسوں کے نقاط تقاطع ہم خط ہوتے ہیں۔





۲۔ دو ثابت نقطوں کو ایک مثلث کے راسوں سے ملانیوالے خطوط متقابلہ اضلاع کو جن چھ نقطوں پر	۲آ۔ دو ثابت خط ایک مثلث کے اضلاع کو جن چھ نقطوں پر قطع کرتے ہیں اُن کو متقابلہ راسوں سے

قطع کرتے ہیں، وہ ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔	ملانیوالے خطوط ایک مخروطی کو لف کرتے ہیں۔
۳۔ ایک مخروطی پر کے چھ نقطوں کو ملانے سے جو چھ ضلعی اشکال بنتی ہیں انہیں سے ہر ایک کے متقابلہ اضلاع کے تین نقاط تقاطع ہم خط ہوتے ہیں۔ پیاسکل کا مسئلہ۔	۳۔ ایک مخروطی کو مس کرنیوالے چھ خطوں سے جو چھ نقطی اشکال بنتی ہیں انہیں سے ہر ایک کے متقابلہ راسوں کو ملانے والے تین خط ہم نقطہ ہوتے ہیں۔ بریانکان کا مسئلہ۔
۴۔ اگر ایک مخروطی ایک چار زاوئی کے گرد کھینچی جائے تو اسکے وتری نقطوں سے جو مثلث بنتا ہے وہ مخروطی کیلئے خود مزدوج ہوتا ہے۔	۴۔ اگر ایک چار ضلعی میں ایک مخروطی کھینچا جائے تو اسکے وتروں سے جو مثلث بنتا ہے وہ مخروطی کے لئے خود مزدوج ہوتا ہے۔

(231) **۲۳۳۔ مسئلہ۔** مخروطی سَ قطع ناقص، مکافی، یا زائد ہوگا بموجب اِس کے کہ خ کا مرکز، س کے اندر، س پر، یا س کے باہر ہو۔

کیونکہ خ کا مرکز لاتناہی پر کے خط میں متکافی ہوتا ہے اور خ کے مرکز میں سے گذرنیوالے خطوط اُن نقطوں میں متکافی ہوتے ہیں جو لاتناہی پر کے خط پر ہیں۔

اس لئے خ کے مرکز سے س کے مماس، سَ پر لاتناہی پر کے نقطوں میں متکافی ہونگے اور س کے اِن مماسوں کے نقاط تماس، سَ کے متقاربوں میں متکافی ہونگے۔

پس اگر خ کا مرکز، س کے باہر ہو تو سَ کے دو حقیقی متقارب ہونگے اور اس لئے سَ قطع زائد ہوگا۔

اگر خ کا مرکز، س پر ہو تو سَ کا ایک متقارب ہوگا یعنی لاتناہی پر کا خط۔ اِس لئے سَ قطع مکافی ہوگا۔

اگر خ کا مرکز، س کے اندر ہو تو سَ کے کوئی حقیقی متقارب نہیں ہونگے اور اسلئے سَ قطع ناقص ہوگا۔

۲۳۴۔ وہ صورت جبکہ خ ایک دائرہ ہو۔

اگر امدادی یا بنیادی مخروطی خ ایک دائرہ ہو (ایسی صورت میں ہم اس دائرہ کو د سے اور اسکے مرکز کو و سے تعبیر کرینگے) تو اشکال ف اور فَ میں ایک اور ربط موجود ہوتا ہے جو کسی اور طرح حاصل نہیں ہوتا۔

چونکہ دائرہ د کے لحاظ سے کسی نقطہ ن کا قطبی، و ن پر عمود ہوتا ہے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ شکل ف یا فَ کے تمام خطوط شکل فَ یا ف کے متناظر نقطوں کو و سے ملانیوالے خطوں پر عمود ہیں۔

پس ایک شکل میں کسی دو خطوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو و پر اُس خط کے محاذی بنتا ہے جو دوسری شکل کے نظیری نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔

بالخصوص یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر و سے س کے مماس علی القوائم ہوں تو سَ ایک قائم زائد ہوگا۔

کیونکہ اگر س کے مماس و ن اور و ق ہوں تو سَ کے متقارب، دائرہ د کے لحاظ سے ن اور ق کے قطبی ہیں اور علی القوائم ہیں کیونکہ ن و ق ایک قائمہ زاویہ ہے۔

پس اگر ایک دائرہ کے لحاظ سے جسکا مرکز مرتب پر ہو ایک قطع مکافی کی مکافات عمل میں آئے، یا اگر ایک دائرہ کے لحاظ سے جسکا مرکز مرتب دائرہ پر ہو ایک مرکزدار مخروطی کی مکافات عمل آئے تو ہمیشہ ایک قائم زائد حاصل ہوگا۔

نیز اسکا بھی مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ ایک مثلث جسکا مرکز عمودی و پر ہو ایک دوسرے مثلث میں جسکا مرکز عمودی بھی و پر ہوتا ہے منکافی ہوتا ہے۔ اسکی تصدیق طالب علم خود کرلے۔

۲۳۵ ۔ اب یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ حسب ذیل دو مسئلے مکافات کے ذریعہ مربوط ہیں۔

۱۔ ایک ایسے مثلث کا مرکز عمودی جو ایک قطع مکافی کے گرد کھینچا گیا ہو مرتب پر واقع ہوتا ہے۔

۲۔ ایک ایسے مثلث کا مرکز عمودی جو ایک قائم زائد کے اندر کھینچا گیا ہو اسی قائم زائد پر واقع ہوتا ہے۔

یہ دو مسئلے دفعات ۹۵ اور ۱۳۰ میں بلا واسطہ ثابت کئے جا چکے ہیں۔ اب ہم یہ بتائینگے کہ دوسرا مسئلہ پہلے مسئلہ سے مکافات کے ذریعہ کس طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ مسئلہ (۱) مسلمہ ہے۔

ایک دائرہ د کے لحاظ سے جسکا مرکز و مثلث کے مرکز عمودی پر ہو مکافات عمل میں لاؤ۔

اب قطع مکافی لاتناہی پر کے خط کو مس کرتا ہے۔ اس لئے لاتناہی پر کے خط کا قطب، بلحاظ دائرہ د کے، متکافی منحنی پر واقع ہوتا ہے یعنی نقطہ و متکافی منحنی پر واقع ہے۔

اور متکافی منحنی ایک قائم زائد ہے کیونکہ و، مکافی کے مرتب پر ہے نیز و اس مثلث کا بھی مرکز عمودی ہے جو مکافی کو حائط کرنیوالے مثلث کا متکافی ہے۔

اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک قائم زائد ایک مثلث کے گرد کھینچا جائے تو مرکز عمودی اس منحنی پر واقع ہوگا۔

نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ قائم زائد کے علاوہ کوئی اور مخروطی ایک مثلث کے راسوں اور اسکے مرکز عمودی میں سے نہیں گذر سکتا۔

۲۳۶ ۔ مسئلہ ۔ اگر س ایک دائرہ ہو اور اگر ہم ایک دائرہ د کے لحاظ سے جسکا مرکز و ہے مکافات کریں تو سَ ایک مخروطی ہوگا جسکا ایک ماسکہ و ہوگا۔

فرض کرو کہ س کا مرکز ا ہے۔

فرض کرو کہ س کا کوئی مماس ن ہے اور اسکا نقطہ تماس ق ہے۔

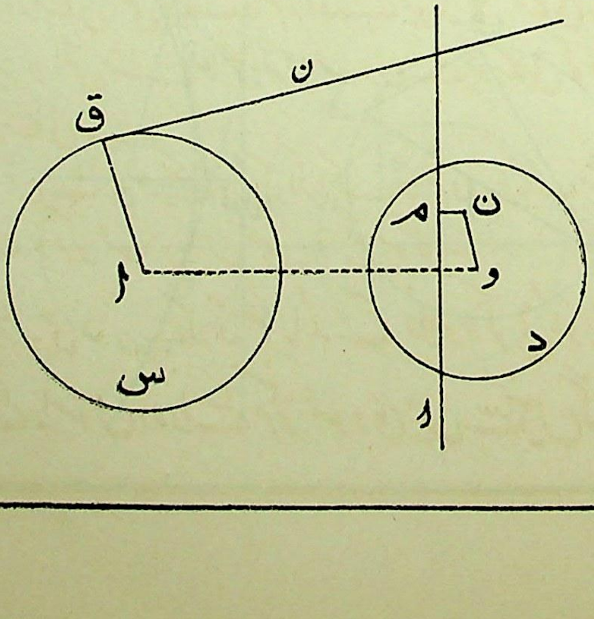
فرض کرو کہ دائرہ د کے لحاظ سے ن کا قطب ن ہے اور ا کا قطبی ا ہے۔

ن م ، ا پر عمود کھینچو۔

اب چونکہ ا ق ، ن پر عمود ہے اسلئے سامن کے مسئلہ (دفعہ ۱۷) (233) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ون}}{\text{وا}} = \frac{\text{نم}}{\text{اق}}$$

$$\therefore \frac{\text{ون}}{\text{نم}} = \text{مستقل}\ \frac{\text{وا}}{\text{اق}}$$



اس طرح ن کا طریق جو متکافی منحنی پر ایک نقطہ ہے ایک مخروطی ہے جسکا ماسکہ و ہے اور جسکا نظیری مرتب، س کے مرکز کا قطبی ہے ۔

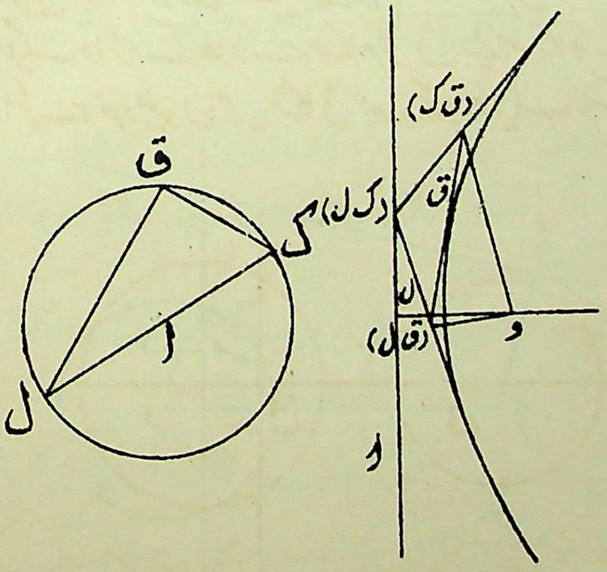
چونکہ سَ کا خروج المرکز $\frac{\text{وا}}{\text{اق}}$ ہے اسلئے سَ، قطع ناقص یا قطع مکافی یا قطع زائد ہوگا بموجب اسکے کہ و، س کے اندر یا س پر یا س کے باہر ہو ۔ یہ نتیجہ دفعہ ۲۳۳ کے مطابق ہے ۔

نتیجۂ صریح ۔ اگر ایک دائرہ کا مرکز ایک مخروطی کے ماسکہ پر واقع ہو تو اس دائرہ کے لحاظ سے اس مخروطی کا قطبی متکافی ایک دائرہ ہوگا جس کا مرکز نظیری مرتب کا متکافی ہوگا ۔

۲۳۷ ۔ فرض کرو کہ ہم ایک دائرہ کے لحاظ سے اس مسئلہ کی مکافات عمل میں لاتے ہیں کہ ایک نصف دائرہ کے اندر کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے ۔

فرض کرو کہ س کا مرکز ا ہے، ک ل کوئی قطر ہے اور ق محیط پر کوئی نقطہ ہے ۔

(234)



متکافی شکل میں ا کے جواب میں مرتب ا اور (ک ل) کے جواب میں اس شکل پر ایک نقطہ (ک ل) حاصل ہوتا ہے۔

(ک ل) سے سَ کے مماس ک اور ل ہیں جو ک اور ل کے جواب میں ہیں اور ق کے جواب میں سَ کا مماس ق ہے۔

اب (ق ک) اور (ق ل) علی القوائم ہیں۔

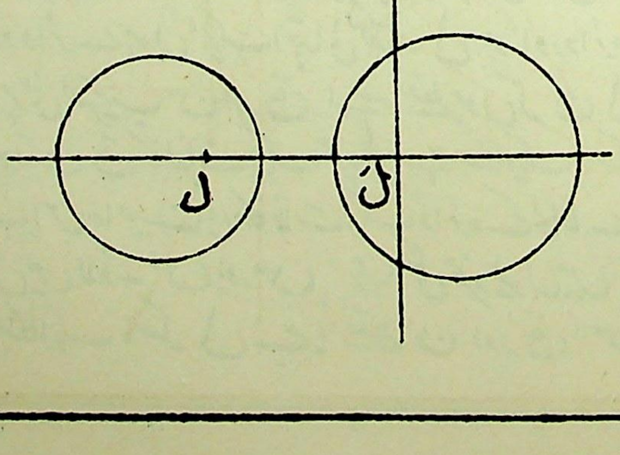
اس لئے (ق ک) اور (ق ل) کو ملانیوالا خط و پر ایک قائمہ زاویہ بناتا ہے جو سَ کا ماسکہ ہے۔

اس لئے متکافی مسئلہ یہ ہے کہ ایک مخروطی کے کسی مماس پر دو مماسوں کے درمیان کا مقطوعہ جبکہ یہ دو مماس مرتب پر متقاطع ہوں ماسکہ پر ایک قائمہ زاویہ بناتا ہے۔

۲۳۸ - مسئلہ - غیر قاطع ہم محور دائروں کے کسی نظام کو ہم ماسکی مخروطیوں میں متکافی کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ دائروں کے اس نظام کے انتہائی نقطے ل اور لَ ہیں۔ ایک دائرہ کے لحاظ سے جسکا مرکز ل پر ہو مکافات عمل میں لاؤ تو تمام دائرے مخروطیوں میں متکافی ہونگے جنکا ایک ماسکہ ل ہوگا۔

(235)



مزید برین دائروں میں سے کسی ایک کے متکافی مخروطی کا مرکز، اُس دائرہ کے لحاظ سے ل کے قطبی کا متکافی ہوگا۔

لیکن ل کا قطبی تمام دائروں کے لئے ایک ہی ہے یعنی ل میں سے گذرنیوالا وہ خط جو مرکزوں کے خط پر عمود ہے۔ (دفعہ ۲۲)

اِس لئے تمام متکافی مخروطی ایک مشترک مرکز رکھتے ہیں اور نیز ایک مشترک ماسکہ۔

اِس لئے وہ تمام ایک دوسرا مشترک ماسکہ بھی رکھتے ہیں یعنے وہ ہم ماسکی ہیں۔

۲۳۹ — ہم جانتے ہیں کہ اگر ہم محور نظام کے دو دائروں کا ایک مشترک مماس ت ہو جو انہیں نقطوں ن اور ق پر مس کرے تو ن ق کے محاذی ل پر ایک قائمہ زاویہ بنتا ہے۔

اب اسکی مکافات ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز ل پر ہو عمل میں لاؤ۔ ہم محور نظام کے یہ دو دائرے ہم ماسکی مخروطیوں میں متکافی ہونگے، مشترک مماس ت، ہم ماسکیوں کے ایک مشترک نقطہ میں متکافی ہوگا، اور نقطے ن اور ق، اِس مشترک نقطہ پر ہم ماسکیوں کے مماسوں میں متکافی ہونگے۔

اِس لئے ہم ماسکی مخروطی علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔

یہ نتیجہ مشہور ہے اور دوسرے طریقہ پر آسانی سے ثابت ہوتا ہے۔ لیکن ہم یہاں صرف مکافات کے اصولوں کی وضاحت کر رہے ہیں۔

۲۴۰ — نیز یہ بھی معلوم ہے (دیکھو تیرہویں باب کی مثال ۴۰) کہ اگر س۱ اور س۲ دو دائرے ہوں، ایک انتہائی نقطہ ل ہو، اور دائروں س۱، س۲ پر علی الترتیب ن اور ق ایسے نقطے ہوں کہ ن ل ق ایک قائمہ زاویہ ہو تو ن ق کا لفاف ایک مخروطی ہے جسکا ایک ماسکہ ل پر ہے۔

اب اِس خاصیت کی مکافات ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز ل پر ہو عمل میں لاؤ۔ س۱ اور س۲، ہم ماسکی مخروطیوں میں متکافی ہوتے ہیں جنکا ایک ماسکہ ل ہے؛ نقطے ن اور ق، س۱ اور س۲

(236) کے مماسوں میں متکافی ہوتے ہیں یعنی ن اور ق میں جو علی القوائم ہونگے، اور خط (ن ق) نقطہ (ن ق) میں متکافی ہوتا ہے ۔

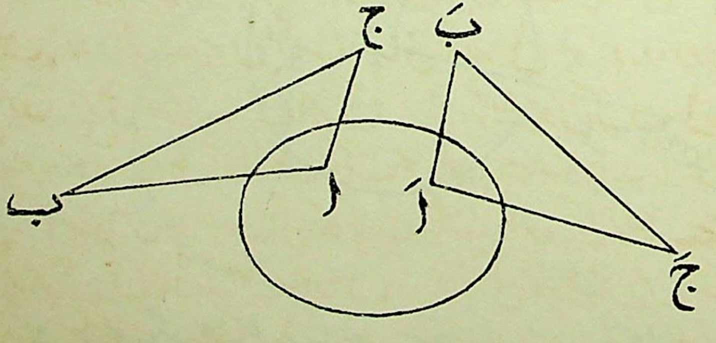
چونکہ (ن ق) کا لفاف ایک مخروطی ہے جسکا ایک ماسکہ ل پر ہے اس لئے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ (ن ق) کا طریق ایک دائرہ ہے ۔

پس حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے :

اگر دو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ہر ایک کا ایک ایک مماس نقطہ ت سے کھینچا جائے اور یہ دو مماس باہم علی القوائم ہوں تو ت کا طریق ایک دائرہ ہے ۔

۲۴۱ ۔ ہم اس باب کو دو مسئلے ثابت کرنیکے بعد ختم کرینگے، ایک مسئلہ کا تعلق دو مثلثوں سے ہے جو ایک مخروطی کے لحاظ سے خود مزدوج ہوتے ہیں اور دوسرے کا تعلق ایسے دو مثلثوں سے ہے جو ایک مخروطی کے لحاظ سے متکافی ہوتے ہیں۔

مسئلہ ۔ اگر دو مثلث ایک ہی مخروطی کے لحاظ سے خود مزدوج ہوں تو ان کے چھ راس ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں اور انکے چھ ضلع ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں ۔



فرض کرو کہ دو مثلث ا ب ج اور اَ بَ جَ ایک مخروطی س کے لحاظ سے خود مزدوج ہیں۔

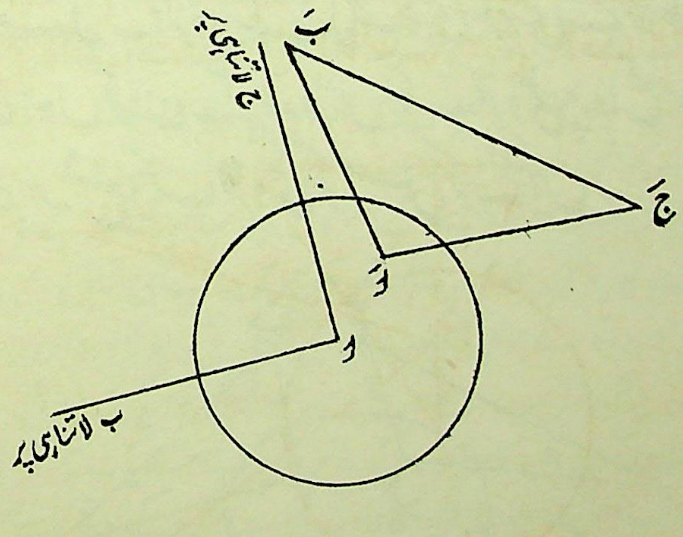
س کو ایک دائرہ میں اور ا کو اس دائرہ کے مرکز میں منظلل کرو اور ظِلّوں کے لئے چھوٹے حروف استعمال کرو تو ا ب، ا ج مزدوج قطر ہونگے اور اس لئے ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے اور ب اور ج لاتناہی پر کے خط پر واقع ہونگے۔

نیز اَ بَ جَ، دائرہ کے لحاظ سے ایک خود مزدوج مثلث ہے۔

∴ ا جو اس دائرہ کا مرکز ہے اس مثلث کا مرکز عمودی ہے۔

(237) فرض کرو کہ ایک مخروطی پانچ نقطوں اَ، بَ، جَ، ا اور ب میں سے گذرتا ہے۔

یہ مخروطی قائم زائد ہونا چاہئے کیونکہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ قائم زائد کے علاوہ کوئی اور مخروطی ایک مثلث کے راسوں اور اس کے مرکز عمودی میں سے نہیں گذر سکتے۔



∴ ج بھی اسی مخروطی پر واقع ہے جو مذکورۂ بالا پانچ نقطوں میں سے

گذرتا ہے کیونکہ ایک قائم زائد کے لاتناہی پر کے دو نقطوں کو ملانیوالا خط کسی نقطہ پر ایک قائمہ زاویہ بنانا چاہیئے۔

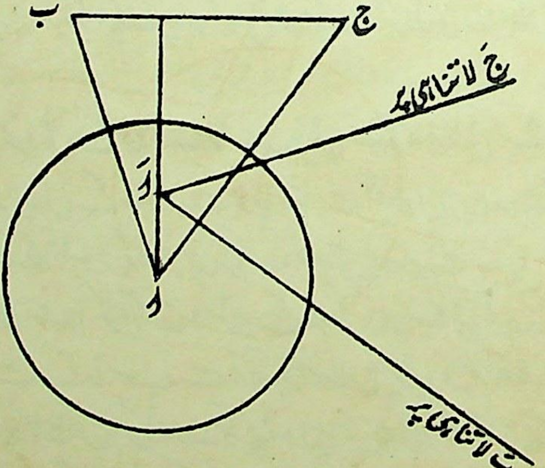
اس لئے چھ نقطے ا، ب، ج، اَ، بَ، جَ سب کے سب ایک مخروطی پر واقع ہیں۔

∴ چھ نقطے ا، ب، ج، اَ، بَ، جَ بھی ایک مخروطی پر واقع ہیں۔

مسئلہ کا دوسرا حصہ اس ثابت شدہ حصہ کی مکافات سے فوراً حاصل ہوتا ہے۔

۲۴۲ — مسئلہ۔ اگر دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے تکافی ہوں تو وہ منظرہ میں ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ دو مثلث ا ب ج اور اَ بَ جَ ایک مخروطی س کے لحاظ سے تکافی ہیں جسکا یہ مطلب ہے کہ ا، بَ جَ کا قطب ہے؛ ب، جَ اَ کا قطب؛ اور ج، اَ بَ کا قطب اور اسلئے نیز اَ، ب ج کا قطب ہے؛ بَ، ج ا کا قطب؛ اور جَ، ا ب کا قطب۔



س کو ایک دائرہ میں اور ا کو اس دائرہ کے مرکز میں مظلل کرو۔

∴ بَ اور جَ لاتناہی پر مظلل ہوتے ہیں۔

ظِل میں چھوٹے حروف استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

ا اَ، ب ج پر عمود ہے کیونکہ اَ، ب ج کا قطب ہے۔

نیز چونکہ بَ، ا ج کا قطب ہے اس لئے ا بَ، ا ج پر عمود ہے

اور اِس لئے ب بَ جو ا بَ کے متوازی ہے ا ج پر عمود ہے۔

اسی طرح ج جَ، ا ب پر عمود ہے۔

∴ ا اَ، ب بَ، ج جَ، مثلث ا ب ج کے مرکز عمودی پر ملتے ہیں۔

∴ ا اَ، ب بَ، ج جَ ہم نقطہ ہیں۔

مثالیں

۱ — اگر مخروطی س اور سَ، مخروطی خ کے لحاظ سے متکافی قطبی ہوں تو سَ کا مرکز، س کے لحاظ سے خ کے مرکز کے قطبی کا جواب ہوگا۔

۲ — متوازی خطوط ایسے نقطوں میں متکافی ہوتے ہیں جو بنیادی مخروطی خ کے مرکز کے ساتھ ہم خط ہوتے ہیں۔

۳ — ثابت کرو کہ ایک چار زوائی کو ایک متوازی الاضلاع میں متکافی کیا جا سکتا ہے۔

۴ — کسی مخروطی کے لحاظ سے حسب ذیل مسئلہ کا متکافی مسئلہ معلوم کرو:۔

اُن مخروطیوں کے لحاظ سے جو چار ثابت نقطوں میں سے گذرتے ہیں ایک دئے ہوئے خط کے قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔

امثلہ ۵ تا ۱۲ کو ایک دائرہ کے لحاظ سے متکافی کرو۔

۵ — مثلث کے راسوں سے متقابلہ اضلاع پر عمود ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

۶ — دائرہ کا مماس اُس نصف قطر پر عمود ہوتا ہے جو نقطہ تماس میں سے گذرتا ہے

۷ — ایک ہی قطعہ دائرہ کے اندر کے زاوئے مساوی ہوتے ہیں۔

۸ — ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے کسی چار ضلعی کے متقابلہ زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویوں کے مساوی ہوتا ہے —

۹ — ایک دائرہ کے کسی نقطہ پر کے مماس اور اِس نقطہ میں سے گذرنیوالے کسی وتر کے درمیان جو زاویہ ہوتا ہے وہ متبادلہ قطعہ دائرہ کے اندر کے زاوئے کے مساوی ہوتا ہے —

۱۰ — ایک دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی اُس خط پر عمود ہوتا ہے جو اِس نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملاتا ہے —

۱۱ — ایک دائرہ کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق جبکہ مماس ایک دئے ہوئے زاوئے پر قطع کریں ایک ہم مرکز دائرہ ہوتا ہے —

۱۲ — ایک دائرہ کے وتر جن کے محاذی مرکز پر ایک مستقل زاویہ دیتے ایک ہم مرکز دائرہ کو لف کرتے ہیں —

۱۳ — ثابت کرو کہ دو مخروطی جو دوہرا تماس رکھتے ہوں دوہرا تماس رکھنے والے مخروطیوں میں متکافی ہونگے —

۱۴ — ایک دائرہ س کو ایک دائرہ ج کے لحاظ سے ایک مخروطی سَ میں متکافی کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ج کا نصف قطر، س کے نصف قطر اور سَ کے نیم وترِ خاص کے درمیان ہندسی اوسط ہے —

۱۵ — ثابت کرو کہ ایک دئے ہوئے نقطہ کو ماسکہ مانکر چار مخروطی کھینچے جا سکتے ہیں جو ایک دئے ہوئے دائرہ کو محیط کریں اور نیز یہ ثابت کرو کہ اِن مخروطیوں میں سے تین مخروطیوں کے وترِ خاص کا مجموعہ چوتھے مخروطی کے وترِ خاص کے مساوی ہوگا —

۱۶ — چند مخروطی، ایک ماسکہ اور مماسوں کا ایک زوج مشترک رکھتے ہیں — ثابت کرو کہ نظیری مرتب ایک ثابت نقطہ میں سے گذرینگے اور تمام مرکز ایک ہی خطِ مستقیم پر واقع ہونگے —

۱۷ — ایک دائرہ کا مرکز س ہے، اِس دائرہ کے لحاظ سے مکافات کا عمل کر کے حسبِ ذیل مسئلہ ثابت کرو :— اگر ایک مثلث ا ب ج ، ایک قطع مکافی کو

(240) محیط کرے جسکا ماسکہ س ہے تو ا، ب، ج میں سے گذرنیوالے وہ خطوط جو علی الترتیب س ا، س ب، س ج پر عمود ہوں ہم نقطہ ہونگے

۱۸ــ چند مخروطی کھینچے گئے ہیں جنکا ایک ماسکہ ایک ثابت نقطہ س پر ہے اور یہ مخروطی ایسے ہیں کہ دو ثابت نقطوں سے اِن کے چار مماسوں میں سے ہر مماس، س پر دی ہوئی مقدار کا ایک ہی زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ مرتب جو س کے جواب میں ہیں ایک ثابت نقطہ س میں سے گذرتے ہیں۔

۱۹ــ دو قطعات مکافی کے مشترک مماس پر و کوئی نقطہ ہے اور اِن مکافیوں کا ماسکہ ایک ہی ہے۔ ثابت کرو کہ و سے مکافیوں کے دوسرے مماسوں کے درمیان ایسا زاویہ بنتا ہے جو مکافیوں کے محوروں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے

۲۰ــ ایک مخروطی، مثلث ا ب ج کو حائط کرتا ہے اور اس کا ماسکہ مثلث کے مرکز عمودی ع پر ہے۔ ثابت کرو کہ نظیری مرتب، ن ع پر عمود ہے اور اسے ایک ایسے نقطہ لا پر ملتا ہے کہ ن ع × ع لا = ا ع × ع د جہاں مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز ن ہے اور ا سے ب ج پر کے عمود کا پائین د ہے۔ یہ بھی تبلاؤ کہ مخروطی کا مرکز کس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے۔

۲۱ــ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے وتر جنکے محاذی مخروطی کے ایک دئے ہوئے نقطہ پر ایک مستقل زاویہ بنے ایک مخروطی کو لف کرینگے۔

[ایک دائرہ کے ذریعہ جسکا مرکز دئے ہوئے نقطہ پر ہو مخروطی کو ایک مکافی میں متکافی کرو]

۲۲ــ اگر ایک مثلث کو ایک دائرہ کے لحاظ سے جسکا مرکز و، مثلث کے حائط دائرہ پر ہے متکافی کیا جائے تو نقطہ و، متکافی مثلث کے حائط دائرہ پر بھی واقع ہوگا۔

۲۳ــ حسب ذیل نتیجہ ثابت کرو اور اس سے مکافات کے ذریعہ ایک مسئلہ حاصل کرو جس کا اطلاق ہم محور دائروں پر ہو:۔ اگر کسی نقطہ سے دو ہم ماسکی مخروطیوں س_1 اور س_2 کے مماس ن، نَ اور ق، قَ کھینچے جائیں تو ن اور ق کا درمیانی زاویہ، نَ اور قَ کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے

۲۴ — حسب ذیل نتیجہ ثابت کرو اور کسی مخروطی کے لحاظ سے اُسے متکافی کرو۔ اگر ا ب ج ایک مثلث ہو اور اگر کسی مخروطی کے لحاظ سے ا ب ج کے قطبی متقابلہ اضلاع سے ن، ق، ر پر ملیں تو ن، ق، ر ہم خط ہوتے ہیں۔

۲۵ — ایک ثابت نقطہ و کو جو ایک دئے ہوئے دائرہ کے مستوی میں ہے دائرہ کے کسی قطر کے سروں ا اور ب سے ملایا گیا ہے۔ و ا اور و ب دائرہ سے مکرر ن اور ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے مماس ایک ثابت خط پر جو و کے قطبی کے متوازی ہے متقاطع ہوتے ہیں۔

۲۶ — ثابت کرو کہ چار ثابت نقطوں میں سے گذرنیوالے تمام مخروطیوں کو قائم زائدوں میں مظلل کیا جا سکتا ہے۔

(241) ۲۷ — اگر دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے متکافی ہوں (دفعہ ۲۴۲) تو انکے منظرہ کا مرکز مخروطی کے لحاظ سے منظرہ کے محور کا قطب ہوتا ہے۔

۲۸ — ثابت کرو کہ قطع ناقص کے اُن وتروں کا لفاف جنکے محاذی مرکز پر ایک قائمہ زاویہ بنے ایک ہم مرکز دائرہ ہوتا ہے۔

[ایک دائرہ کے لحاظ سے جسکا مرکز قطع ناقص کے مرکز پر ہو مکافات عمل میں لاؤ]

۲۹ — ا ب ج ایک مثلث ہے اور اسکا اندرونی مرکز م ہے۔ اندرونی دائرہ ضلعوں کو ا$_{ا}$، ب$_{ا}$، ج$_{ا}$ پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو م کو ا ا$_{ا}$، ب ب$_{ا}$، ج ج$_{ا}$ کے مشترک نقطہ سے ملاتا ہے اُس خط پر عمود ہے جو ب ج، ب$_{ا}$ ج$_{ا}$؛ ج ا، ج$_{ا}$ ا$_{ا}$؛ ا ب، ا$_{ا}$ ب$_{ا}$ کے تین ہم خط نقاط تقاطع کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔ [مثال ۲۷ استعمال کرو]

اٹھارواں باب

(242)

دائری نقطے۔ مخروطیوں کے ماسکے

۲۴۳۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہم نقطہ خطوں کے ازواج جو ایک مخروطی کے لحاظ سے مزدوج ہوں ایک درپیچ بناتے ہیں اور اِن خطوں کے مشترک نقطہ سے مخروطی کے مماس دوہرے خطوط ہوتے ہیں۔

پس کسی مخروطی کے مزدوج قطر درپیچ میں ہونے ہیں اور درپیچ کے دوہرے خطوط مخروطی کے متقارب ہوتے ہیں۔

لیکن کسی دائرے کے مزدوج قطر علی القوائم ہوتے ہیں۔

اِس لئے کسی دائرہ کے متقارب اس کے مرکز پر کے قائم درپیچ کے خیالی دوہرے خطوط ہوتے ہیں۔

لیکن کسی نقطہ پر کے قائم درپیچ کے دوہرے خطوط صریحاً کسی دوسرے نقطہ پر کے قائم درپیچ کے دوہرے خطوط کے متوازی ہونے چاہئیں کیونکہ ہم گردش کے بغیر صرف حرکت انتقال کے ذریعہ ایک نقطہ کو کسی دوسرے نقطے کے محل میں لا سکتے ہیں۔

اِس لئے ایک دائرہ کے متقارب اسی مستوی کے کسی دوسرے دائرے کے متقاربوں کے متوازی ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک دائرہ ج کے متقارب ا، ب ہیں اور دوسرے

دائرہ جَ کے متقارب، اَ، بَ تو چونکہ ا، اَ متوازی ہیں اس لئے وہ لاتناہی پر کے خط پر ملتے ہیں اور چونکہ ب، بَ متوازی ہیں اسلئے وہ بھی لاتناہی پر کے خط پر ملتے ہیں۔

لیکن ا اور اَ، ج اور جَ سے لاتناہی پر کے خط پر ملتے ہیں۔

اور ب اور بَ، ج اور جَ سے لاتناہی پر کے خط پر ملتے ہیں۔

اس لئے ج اور جَ، لاتناہی پر کے خط کے وہی دو خیالی نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

غرض ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ایک مستوی میں کے سب دائرے لاتناہی پر کے خط کے وہی دو خیالی نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔ ان دو نقطوں کو لاتناہی پر کے **دائری نقطے یا صرف دائری نقطے** کہا جاتا ہے۔

(243) کسی نقطہ پر **دائری خطوط** وہ خطوط ہوتے ہیں جو اس نقطہ کو لاتناہی پر کے دائری نقطوں سے ملاتے ہیں، اور وہ اس نقطہ پر قائم دریچ کے خیالی دوہرے خطوط ہوتے ہیں۔

۲۴۴ ۔ تحلیلی نقطہ نظر سے ۔

دائری خطوط پر تحلیلی نقطہ نظر سے غور کرنا طالب علم کے لئے مفید ہوگا اگرچہ یہ اس کتاب کے حدود سے باہر ہے۔

دائرہ کی مساوات اس کے مرکز کے حوالہ سے حسب ذیل ہے

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$$

اس دائرہ کے متقارب

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 0$$

ہیں یعنے حسب ذیل خیالی خطوں

$$\text{ما} = \text{خ لا}\ ،\ \text{ما} = -\,\text{خ لا}$$

کا زوج ہیں ۔

یہ دو خطوط دائرہ کے مرکز پر دائری خطوط ہیں ۔

وہ نقطے جن پر یہ دائری خطوط لاتناہی پر کے خط سے ملتے ہیں دائری نقطے ہیں ۔

اگر ہم دائرہ کے مرکز پر محددوں کے محوروں کو کسی زاویے میں سے گھمائیں اور انہیں علی القوائم ہی رکھیں تو دائرہ کی مساوات شکل میں نہیں بدلتی اور اس لئے متقارب نئے اور پرانے دونوں محوروں کے ساتھ وہی زاویے $\text{مس}^{-1}(\text{خ})$ اور $\text{مس}^{-1}(-\text{خ})$ بنائینگے ۔

یہ پہلی نظر میں مغالطہ آمیز معلوم ہوگا ۔ لیکن اس مغالطہ کی وضاحت اِس واقعہ سے ہوتی ہے کہ خط ما = خ لا مستوی میں کے ہر خط کے ساتھ وہی زاویہ $\text{مس}^{-1}(\text{خ})$ بناتا ہے ۔

کیونکہ فرض کرو کہ ما = م لا مبدا میں سے گذرنیوالا کوئی اور خط ہے تب خط ما = خ لا جو زاویہ اِس خط کے ساتھ بناتا ہے وہ

$$\text{مس}^{-1}\text{خ} = \text{مس}^{-1}\left\{\frac{\text{خ}(\text{۱}+\text{خ م})}{\text{۱}+\text{خ م}}\right\} = \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{خ}-\text{م}}{\text{۱}+\text{خ م}}\right)$$

ہے جبکہ اس زاویہ کی پیمائش ما = م لا سے مثبت جہت میں کیگئی ہو ۔

۲۴۵ ۔ مسئلہ ۔ اگر ا و ب مستقل مقدار کا ایک زاویہ ہو اور سا، سَا دائری نقطے ہوں تو پنسل و(سا، سَا، ا، ب) کی چلیپی نسبتیں مستقل ہوتی ہیں ۔

کیونکہ (244)

$$\text{و(سا سَا ا ب)} = \frac{\text{جب ساوسَا جب اوب}}{\text{جب ساوب جب اوسَا}}$$

لیکن زاویے ساوسَا، ساوب، اوسَا سب کے سب مستقل ہیں

کیونکہ دائری خطوط مستوی میں کے ہر خط کے ساتھ ایک ہی زاویہ بناتے ہیں، اور بموجب فرض زاویہ ا و ب مستقل ہے، اس لئے

و (سا سَا ا ب) مستقل ہے۔

۲۴۶۔ مسئلہ۔ وہ سب مخروطی جو دائری نقطوں میں سے گذریں دائرے ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی س کا مرکز ج ہے اور وہ دائری نقطوں سا اور سَا میں سے گذرتا ہے۔

اب ج سا اور ج سَا، س کے متقارب ہیں۔

لیکن متقاربات اُس درپیچ کے دوہرے خطوط ہوتے ہیں جو مزدوج قطروں کے زوجوں سے بنتی ہے۔ اور دوہرے خطوط کسی درپیچ کو پوری طرح متعین کرتے ہیں یعنی دئے ہوئے دوہرے خطوط رکھنے والا صرف ایک ہی درپیچ ہو سکتا ہے۔

پس س کے مزدوج قطر سب کے سب علی القوائم ہیں۔

اِس لئے س ایک دائرہ ہے۔

دو یا دو سے زیادہ ثابت نقطوں میں سے گذرنیوالے مخروطیوں کے خواص ثابت کرنے میں دائری نقطوں سے استفادہ کیا جا سکتا ہے۔

کیونکہ مخروطیوں کا کوئی نظام جبکہ سب مخروطی وہی دو نقطوں میں سے گذریں ایک ساتھ دائروں میں مظلل کئے جا سکتے ہیں اور یہ اس طرح کیا جا سکتا ہے کہ اِن دو نقطوں کو ظِل کے مستوی پر دائری نقطوں میں مظلل کیا جائے تو مخروطیوں کے ظِل اِس نئے مستوی میں دائری نقطوں میں سے گذرینگے اور اس لئے وہ سب دائرے ہونگے۔

طالب علم بلاشبہ اس سے آگاہ ہوگا کہ ایسی تظلیل صرف خیالی ہے۔

۲۴۷ — اب ہم دائری نقطوں کے استعمال کی ایک مثال دینگے۔

یہ فوراً دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ کوئی قاطع ہم محور دائروں کے کسی نظام سے نقطوں کے ایسے ازواج میں منقطع ہوتا ہے جو درپیچ میں ہوتے ہیں (اِس درپیچ کا مرکز وہ نقطہ ہے جو قاطع اور نظام کے محور کا نقطہ تقاطع ہے)۔

اِس سے ڈیسارگ (Desargues) کا مسئلہ فوراً ماخوذ ہوتا ہے یعنی چار نقطوں میں سے گذرنیوالے مخروطی کسی قاطع کو نقطوں کے ایسے ازواج میں قطع کرتے ہیں جو درپیچ میں ہوتے ہیں۔ (245)

کیونکہ اگر ہم انہیں سے دو نقطوں کو دائری نقطوں میں مظلل کریں تو سب مخروطی دائرے ہو جاتے ہیں۔ مزید براں یہ دائرے ایک ہم محور نظام بناتے ہیں کیونکہ وہ دوسرے دو نقطے بھی مشترک رکھتے ہیں۔

پس ڈیسارگ کا مسئلہ ہم محور دائروں کی درپیچ خاصیت سے ماخوذ ہوتا ہے۔

نیز ہم محور دائروں کی درپیچ خاصیت ڈیسارگ کے مسئلہ کی ایک خاص صورت بھی ہے کیونکہ ہم محور دائرے چار نقطے مشترک رکھتے ہیں جنمیں سے دو دائری نقطے ہوتے ہیں اور دو وہ نقطے جہاں تمام دائرے نظام کے محور سے منقطع ہوتے ہیں۔

۲۴۸ — اب ہم حسب ذیل مسئلہ کے ثبوت میں دائری نقطوں سے استفادہ کرینگے۔

اگر ایک مثلث ایک قائم زائد کے لحاظ سے خود مزدوج ہو تو اسکا حائط دائرہ زائد کے مرکز میں سے گذریگا۔

فرض کرو کہ قائم زائد کا مرکز و ہے، ا ب ج خود مزدوج مثلث ہے اور سا، سَا دائری نقطے ہیں۔

اب مثلث و سا سَا قائم زائد کے لحاظ سے خود مزدوج مثلث ہے

کیونکہ و سا اور و سَا و پر کے اُس قائم درپیچ کے دوہرے خطوط ہیں جس سے متقاربات متعلق ہیں کیونکہ یہ متقاربات علی القوائم ہیں۔ اِس لئے و سا، و سَا اُس درپیچ سے متعلق ہیں جس کے دوہرے خطوط متقاربات ہیں (دفعہ ۸۲)، یعنی وہ درپیچ جو و میں سے گذرنیوالے مزدوج خطوں کے زوجوں سے بنتا ہے۔

∴ و سا اور و سَا مزدوج خطوط ہیں اور نقطہ و لاتناہی پر کے خط سا سَا کا قطب ہے۔

∴ و سا سَا ایک خود مزدوج مثلث ہے۔

نیز ا ب ج ایک خود مزدوج مثلث ہے۔

∴ چھ نقطے ا، ب، ج، و، سا، سَا سب کے سب ایک مخروطی پر واقع ہیں (دفعہ ۲۴۱) اور یہ مخروطی ایک دائرہ ہے کیونکہ وہ سا اور سَا میں سے گذرتا ہے۔

∴ ا، ب، ج، و ہم دائری ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر ایک قائم زائد ایک مثلث کو محیط کرے تو اِس کا مرکز نو نقطی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

یہ مشہور مسئلہ مذکورہ بالا مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے کیونکہ مثلث پایئن قائم زائد کے لحاظ سے خود مزدوج ہے۔ (مثال ۲۱، چودہواں باب)

(246) ۲۴۹ — مسئلہ — ہم مرکز دائرے لاتناہی پر دوہرا تماس رکھتے ہیں

کیونکہ اگر دائروں کا مرکز و ہو اور لاتناہی پر دائری نقطے سا اور سَا ہوں تو سب دائرے و سا اور و سَا کو نقطوں سا اور سَا پر مس کرتے ہیں۔

یعنے سب دائرے ایک دوسرے کو نقطوں سا اور سَا پر مس کرتے ہیں۔

۲۵۰ - مخروطیوں کے ماسکے۔

مسئلہ - ہر مخروطی کے چار ماسکے ہوتے ہیں جنمیں سے دو، مخروطی کے ایک محور پر واقع ہوتے ہیں اور حقیقی ہوتے ہیں اور دو، دوسرے محور پر واقع ہوتے ہیں اور خیالی ہوتے ہیں۔

چونکہ ایک ماسکہ پر کے مزدوج خطوط ایک قائم درپیچ بناتے ہیں اور چونکہ کسی نقطہ سے مخروطی کے مماس اُس درپیچ کے دوہرے خطوط ہوتے ہیں جو وہاں مزدوج خطوط سے بنتا ہے اِس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک ماسکہ میں سے گذرنیوالے دائری خطوط اُس نقطہ سے مخروطی کے مماس ہیں۔

لیکن کسی نقطہ پر کے دوہرے خطوط دائری نقطوں سا اور سَا میں سے گذرتے ہیں۔

پس مخروطی کے ماسکے، سا اور سَا سے مخروطی کے مماس کھینچنے اور اِن کے چار نقاط تقاطع لینے سے حاصل ہونگے۔

اِس لئے چار ماسکے ہوتے ہیں۔

اسکو ٹھیک طور پر ذہن نشیں کرنے کے لئے ایک شکل بناؤ گویا کہ سا اور سَا حقیقی نقطے ہیں۔

اِن نقطوں سے مخروطی کے مماس کھینچو اور فرض کرو کہ حسب شکل اِنکے نقاط تقاطع س، سَ، ف، فَ ہیں جہاں س اور سَ متقابلہ راس اور ف اور فَ متقابلہ راس ہیں۔ (دفعہ 119 ا، کا تکانی)۔

∵ سا سَا کا قطب و ہے یعنی لاتناہی پر کے خط کا قطب و ہے۔

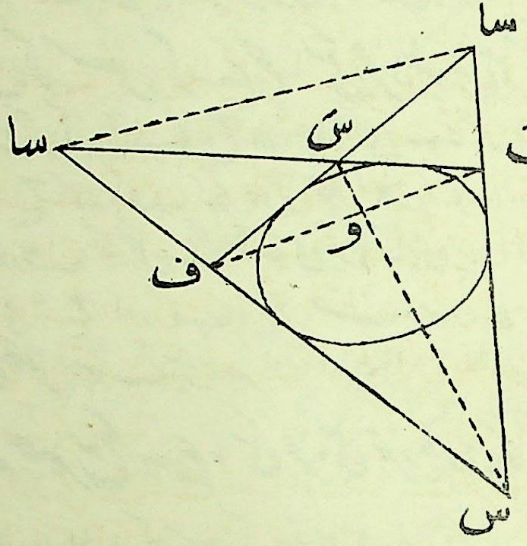
∴ و، مخروطی کا مرکز ہے۔

نیز و سا سَا، چار زاوئی س سَ ف فَ کا وتری یا موسیقی (247)
مثلث ہے۔

∴ و (سا سَا، ف س) = -۱، (دفعہ ۷۶)

∴ وف اور وس مزدوج خطوط ہیں جن کے درہیچ میں وسا اور وسَا دوہرے خطوط ہیں۔

∴ وف اور وس علی القوائم ہیں۔



نیز وف اور وس، مخروطی کے لحاظ سے مزدوج خطوط ہیں کیونکہ وتروں ف فَ، س سَ، سا سَا سے بننے والا مثلث مخروطی کے لحاظ سے خود مزدوج ہے، اور و جیساکہ ہم دیکھ چکے ہیں مرکز ہے۔

∴ وف اور وس، قائم مزدوج قطر ہونے کی وجہ سے، محاور ہیں؛ اس طرح ماسکوں کے دو زوج ہیں، ایک ایک محور پر اور دوسرا دوسرے محور پر۔

اب ہم جانتے ہیں کہ دو ماسکے، فرض کرو س اور سَ، حقیقی ہوتے ہیں، پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دوسرے دو ماسکے ف اور فَ خیالی ہیں۔ کیونکہ اگر ف حقیقی ہوتا تو خط ف س، لاتناہی پر کے خط سے ایک حقیقی نقطہ پر ملتا اور ایسا نہیں ہے۔

∴ ف اور فَ خیالی ہونے چاہئیں ۔

نتیجہ صریح ۔ وہ خطوط جو غیر نظیری ماسکوں کو ملاتے ہیں مخروطی کے مماس ہوتے ہیں اور اِن مماسوں کے نقاط تماس ہم دائری ہوتے ہیں ۔

۲۵۱ ۔ مسئلہ ۔ مخروطیوں کا کوئی نظام جو ایک چار ضلعی کے ضلعوں کو مس کرے ہم ماسکی مخروطیوں میں منظلل کیا جا سکتا ہے ۔ (248)

فرض کرو کہ ا ب ج د چار ضلعی ہے جس میں متقابلہ راسوں کے ازواج ا، ج اور ب، د اور ع، ف ہیں ۔

ع اور ف کو ظِل کے مستوی پر لاانتہا ہی پر دائری نقطوں میں منظلل کرو ۔

∴ ا، ج اور ب، د حسب دفعہ ۲۵۰ ظِل میں مخروطیوں کے ماسکوں میں منظلل ہوتے ہیں ۔

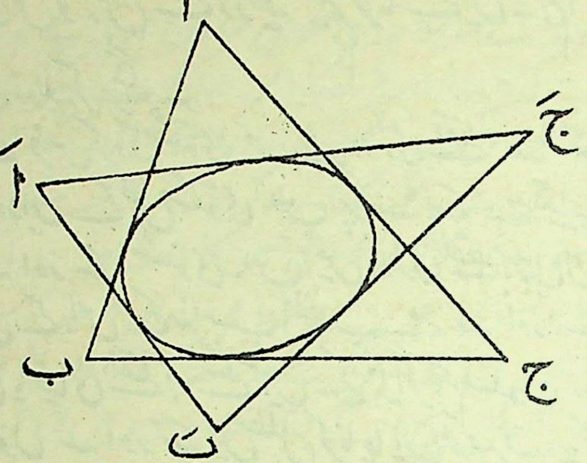
نتیجہ صریح ۔ ہم ماسکی مخروطی مخروطیوں کا ایک ایسا نظام بناتے ہیں جو چار خطوں کو مس کرتے ہیں ۔

۲۵۲ ۔ اب ہم حسب ذیل مسئلہ کو جو غیر اہم نہیں ہے ثابت کرتے وقت اس باب کے نتیجوں سے استفادہ کرینگے ۔

اگر دو مثلثوں کے اضلاع سب کے سب ایک ہی مخروطی کو مس کریں تو اِن مثلثوں کے چھہ راس سب کے سب ایک مخروطی پر واقع ہونگے ۔

فرض کرو کہ ا ب ج اور اَ بَ جَ دو مثلث ہیں جن کے سب اضلاع ایک ہی مخروطی س کو مس کرتے ہیں ۔

ظِل کے مستوی س پر دائری نقطوں کو سہ، سہَ سے تعبیر کرو ۔



ب اور ج کو سہ اور سہَ میں مظلل کرو۔ ∴ س ایک قطع مکانی میں مظلل ہوتا ہے کیونکہ س کا ظِل لاتناہی پر کے خط کو مس کرتا ہے۔

نیز ا، قطع مکانی کے ماسکہ میں مظلل ہوگا کیونکہ ماسکہ سے مماس، دائری نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

ظِل میں متناظر چھوٹے حروف استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (249)
ا، اَ، بَ، جَ ہم دائری ہیں کیونکہ کسی مثلث کا حائط دائرہ جبکہ مثلث ایک قطع مکانی کو مس کرے ماسکہ میں سے گذرتا ہے۔

∴ ا، اَ، بَ، جَ، سہ، سہَ ایک دائرہ پر واقع ہیں۔

∴ ا، ب، ج، اَ، بَ، جَ ایک مخروطی پر واقع ہیں۔

مسئلہ بالا کا عکس مکافات کے ذریعہ فوراً مستنبط ہوتا ہے۔

۲۵۳۔ ہم نے دفعہ ماسبق میں اس عام مسئلہ کا ثبوت دیا ہے کہ اگر دو مثلثوں کے اضلاع ایک مخروطی کو مس کریں تو اِن کے چھ راس ایک دوسرے مخروطی پر واقع ہوتے ہیں، اِس مسئلہ کے ثبوت میں ہم نے ایک مسئلہ کی مدد ظِل میں لی تھی جو یہ ہے کہ ایک مثلث کا حائط دائرہ جسکے ضلع ایک قطع مکانی کو مس کریں ماسکہ میں سے گذرتا ہے۔

اس عمل کو ظِل کے ذریعہ تعمیم کرنا کہتے ہیں۔ ہم اسکی مزید وضاحت مثالوں کے ذریعہ کرینگے۔

۲۵۴۔ فرض کرو کہ مُستوی س میں دائری نقطے سا، سَا سے تعبیر ہوتے ہیں اور اِن کے ظِل مُستوی س پر سہ، سَہ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ اب یقیناً سہ اور سَہ، مُستوی س میں دائری نقطے نہیں ہیں۔ لیکن مُستوی س اور ظِل کے راس کے مناسب انتخاب سے سہ اور سَہ حسب منشاء کوئی دو حقیقی یا خیالی نقطے ہو سکتے ہیں۔ کیونکہ اگر ہم نقطوں سا اور سَا کو فضا میں نقطوں سہ اور سَہ میں مظلل کرنا چاہیں تو صرف یہ کرنا ہو گا کہ خطوط سہ سا اور سَہ سَا کے نقطہ تقاطع کو ظِل کا راس اور سہ اور سَہ میں سے گذرنے والے کسی مُستوی کو مُستوی س لیا جائے۔

۲۵۵۔ مُستویوں س اور س کی شکلوں میں جبکہ سا اور سَا کو سہ اور سَہ میں مظلل کیا گیا ہو حسب ذیل امتیازی خاصیتیں پائی جاتی ہیں:

۱۔ مُستوی س کے دائرے مُستوی س پر مخروطیوں میں مظلل ہوتے ہیں اور یہ مخروطی نقطوں سہ اور سَہ میں سے گذرتے ہیں۔

۲۔ مُستوی س کے قطعات مکافی مُستوی س پر مخروطیوں میں مظلل ہوتے ہیں اور یہ مخروطی خط سہ سَہ کو مس کرتے ہیں۔

۳۔ مُستوی س کے قائم زائد جن کے لئے ہم دیکھ چکے ہیں کہ سا اور سَا مزدوج نقطے ہیں مخروطیوں میں مظلل ہوتے ہیں اور اِن مخروطیوں میں سہ اور سَہ مزدوج نقطے ہوتے ہیں۔

۴۔ مُستوی س میں کسی مخروطی کا مرکز، مُستوی س پر خط سہ سَہ کے قطب میں مظلل ہوتا ہے کیونکہ وہ سا سَا کا قطب ہے۔ (250)

۵۔ مُستوی س کے ہم مرکز دائرے مخروطیوں میں مظلل ہوتے ہیں اور یہ مخروطی مُستوی س میں سہ اور سَہ پر دوہرا تماس رکھتے ہیں۔

۶۔ مُستوی س میں علی القوائم خطوں و ا، و ب کا کوئی زوج

مستوی س پر خطوں وا، وب کے ایک زوج میں مظلل ہوتا ہے جو وسہ، وسہَ کے ساتھ موسیقی طور پر مزدوج ہوتا ہے۔ یہ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ وسا اور وسَا اُس درچیج کے دوہرے خطوط ہیں جن سے وا اور وب متعلق ہیں اور اسلئے و(اب، ساسَا) = -۱ (دفعہ ۸۲) اور اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ و(اب، سہ سہَ) = -۱

۷ — مستوی س کا کوئی مخروطی جس کا ماسکہ م ہو ایک مخروطی میں مظلل ہوگا جو مستوی س میں خطوط م سہ اور م سہَ کو مس کریگا۔ اور مستوی س کے مخروطی کے دو ماسکے م اور مَ، اُس چار ضلعی کے راسوں میں مظلل ہوں گے جو مستوی س میں مخروطی کے ظل کے مماس، سہ اور سہَ سے کھینچنے سے بنتا ہے۔

۲۵۶ — طالب علم کو اس حقیقت سے واقف ہونا چاہئے کہ سہ اور سہَ، مستوی س میں دائری نقطے نہیں ہیں جبکہ وہ سا اور سَا کے ظل ہوں۔

دفعہ ۲۵۲ میں ہم نے مستوی س کے دائری نقطوں کو سہ اور سہَ سے تعبیر کیا ہے لیکن وہاں یہ نقطے مستوی س کے دائری نقطوں کے ظل نہیں ہیں۔

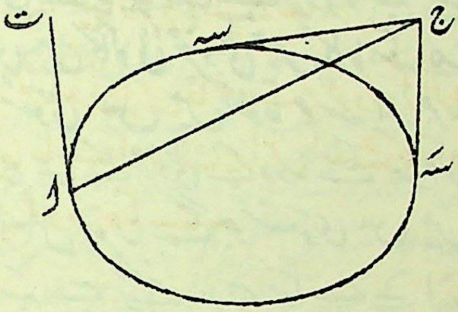
ہم بڑے حرفوں کے ظلوں کو چھوٹے حرفوں سے تعبیر کرتے آئے ہیں اور اِس لئے سا اور سَا کے ظلوں کو ہم نے یہاں سہ اور سہَ سے تعبیر کیا ہے۔ اگر سا اور سَا مستوی س میں دائری نقطے ہیں تو اِن کے ظل سہ اور سہَ مستوی س میں دائری نقطے نہیں ہونگے اور اگر مستوی س میں سہ اور سہَ دائری نقطے ہیں تو مستوی س میں سا اور سَا دائری نقطے نہیں ہونگے جس کا مطلب یہ ہے کہ وقت واحد میں صرف ایک زوج دائری نقطے ہو سکتا ہے۔

۲۵۷ — اب ہم ظل کے ذریعہ تعمیم کی چند مثالیں دینگے۔

اِس مسئلہ پر غور کرو کہ دائرہ کے کسی نقطہ ا پر اس کا نصف قطر،

ا پر کے مماس پر عمود ہوتا ہے ۔

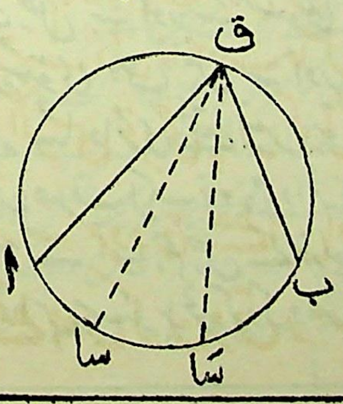
دائرہ کو ایک مخروطی میں مظلل کرو جو سہ اور سہَ میں سے گذرے (251)
دائرہ ج کا مرکز سہ سہَ کے قطب میں مظلل ہوتا ہے ۔

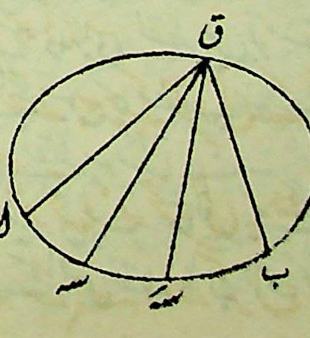


عام مسئلہ یہ ہے کہ اگر کسی مخروطی کے دو نقطوں سہ ، سہَ پر کے مماس نقطہ ج پر ملیں اور مخروطی پر ا کوئی نقطہ ہو اور اس نقطہ پر کا مماس ا ت تو

ا (ت ج ، سہ سہَ) = -۱

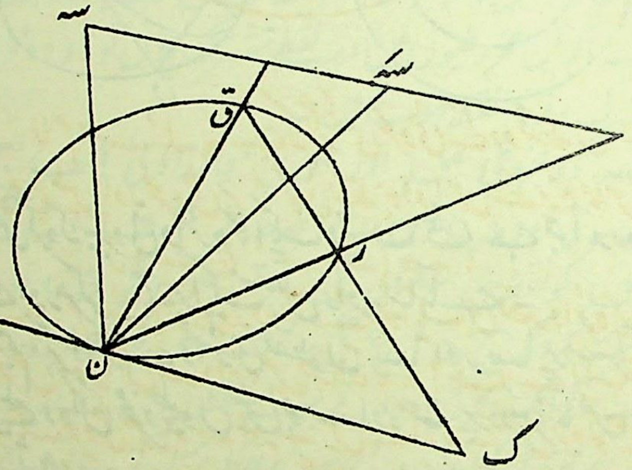
۲۵۸ — پھر اس مسئلہ پر غور کرو کہ وہ زاوئے جو ایک ہی قطعہ دائرہ میں ہوں مساوی ہوتے ہیں ۔ فرض کرو کہ اس قطعہ دائرہ میں جسکا قاعدہ ا ب ہے ایک زاویہ ا ق ب ہے ۔ دائرہ کو ایک مخروطی میں جو سہ اور سہَ میں سے گذرے مظلل کرو تو ہمیں یہ مسئلہ ملیگا کہ اگر چار نقطوں ا ، ب ، سہ ، سہَ میں سے گذرنیوالے ایک ثابت مخروطی پر ق کوئی نقطہ ہے تو (ا ب سہ سہَ) مستقل ہے ۔ (دفعہ ۲۴۵)





پس ایک ہی قطعہ دائرہ کے زاویوں کے مساوی ہونیکی خاصیت مخروطیوں کی مستقل چلیپی نسبت کی خاصیت میں تبدیل ہوکر عام صورت اختیار کرتی ہے۔

۲۵۹ — پھر قائم زائد کی اِس خاصیت پر غور کرو کہ اگر اِس میں مثلث (252)
ن ق ر کھینچا جائے اور ن پر اِس مثلث کا زاویہ قائمہ ہو تو ن پر کا
مماس، ق ر پر عمود ہوتا ہے۔

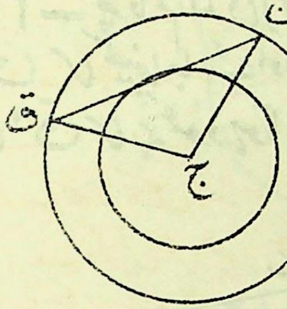


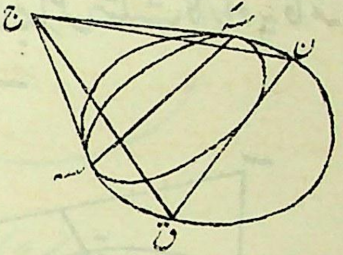
قائم زائد کو ایک مخروطی میں منظلل کرو جس میں سہ اور سہَ مزدوج نقطے ہوں تو حسب ذیل خاصیت حاصل ہوگی:-

اگر کسی مخروطی پر ن کوئی نقطہ ہو جبکہ مخروطی کے لحاظ سے سہ اور سہَ مزدوج نقطے ہیں اور اگر ق، ر مخروطی پر دو دوسرے ایسے نقطے ہوں کہ ن (ق ر، سہ سہَ) = -۱ اور اگر ن پر کا مماس

ق ر سے ک پر ملے تو ک (ن ق، سہ سہَ) = -۱

۲۶۰ — آخر میں ہم ظِل کے ذریعہ اِس مسئلہ کی تعمیم کرینگے کہ دائرہ کے وتر جو ایک ہم مرکز دائرہ کو مس کرتے ہیں مرکز پر ایک مستقل زاویہ بناتے ہیں۔





(253) فرض کرو کہ بیرونی دائرہ کا ایک وتر ن ق ہے جو اندرونی دائرہ کو مس کرتا ہے اور مرکز ج پر ایک مستقل زاویہ بناتا ہے۔

یہ ہم مرکز دائرے دائری نقطوں سا اور سَا پر دوہرا تماس رکھتے ہیں اور اسلیے وہ اُن مخروطیوں میں جو سہ اور سہَ پر دوہرا تماس رکھتے ہیں مظلل ہوتے ہیں۔

مرکز ج، سا سَا کا قطب ہے اور اس لئے ج کا ظِل ج، سہ سہَ کا قطب ہے۔

پس ظِل کے ذریعہ حسب ذیل خاصیت حاصل ہوتی ہے:۔

اگر دو مخروطی دو نقطوں سہ اور سہَ پر دوہرا تماس رکھیں اور اگر اِن نقطوں پر کے مماس ج پر ملیں اور اگر بیرونی مخروطی کا کوئی وتر ن ق ہو جو اندرونی مخروطی کو مس کرے تو ج (ن ق، سہ سہَ)

مستقل ہوتا ہے۔

مثالیں

۱ — اگر ایک مخروطی کا مرکز و اور لا تناہی پر دائری نقطے سا اور سَا ہوں اور اگر اِس مخروطی کے لحاظ سے ایک خود مزدوج مثلث و سا سَا ہو تو اس مخروطی کو قائم زائد ہونا چاہئے۔

۲ — اگر ایک متغیر مخروطی دو دئے ہوئے نقطوں ن اور نَ میں سے گذرے اور دو دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے تو ثابت کرو کہ اِن دو خطوط مستقیم کے نقاط تماس کو ملانیوالا وتر ہمیشہ ن نَ سے ایک ثابت نقطہ پر ملیگا۔

۳ — اگر تین مخروطیوں میں دو نقطے مشترک ہوں تو دو دو مخروطیوں کے متقابلہ مشترک وتر ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

۴ — دو مخروطی س۱ اور س۲، چار زاوی ا ب ج د کو محیط کرتے ہیں۔ ا اور ب میں سے خطوط ا ع ف، ب گ ھ کھینچے گئے ہیں جو س۲ کو نقطوں ع اور گ پر اور س۱ کو ف اور ھ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ج د، ع گ، ف ھ ہم نقطہ ہیں۔

۵ — اگر ایک مخروطی دو دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرے اور ایک دئے ہوئے مخروطی کو ایک دئے ہوئے نقطہ پر مس کرے تو دئے ہوئے مخروطی کے ساتھ اس کے تقاطع کا وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گذریگا۔

۶ — اگر سا، سَا لا تناہی پر دائری نقطے ہوں تو قطع مکانی کے دو خیالی ماسکے سا اور سَا پر منطبق ہوتے ہیں اور مکانی کا مرکز اور دوسرا حقیقی ماسکہ سا سَا اور مکانی کے نقطہ تماس پر منطبق ہوتے ہیں۔

(254)

۷ — اگر دو دئے ہوئے مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع میں سے اور مشترک مماسوں کے ایک زوج کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہوا ایک مخروطی کھینچا جائے تو یہ مخروطی مشترک مماسوں کے دوسرے زوج کے نقطہ تقاطع میں سے بھی گذریگا۔

۸ — اگر تین مخروطی دئے ہوئے چار نقطوں میں سے گذریں تو ثابت کرو کہ

اِن مخروطیوں میں سے کسی دو کا مشترک مماس تیسرے مخروطی سے موسیقی طور پر منقطع ہوتا ہے۔

۹۔ مثال ۸ کے مسئلہ کا متکافی مسئلہ معلوم کرو۔

۱۰۔ اگر دو نقطوں ن اور نَ سے ایک مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو اِن مماسوں کے چار نقاط تماس اور نقاط ن، نَ سب کے سب ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔

[نقطوں ن اور نَ کو دائری نقطوں میں مظلل کرو]

۱۱۔ اگر نقطوں کے چار زوجوں میں سے تین زوجوں کے ہر اجتماع سے ایک مخروطی پر کے چھ نقطے حاصل ہوں تو (۱) اس طرح جو چار مخروطی حاصل ہوتے ہیں وہ منطبق ہوتے ہیں یا (۲) نقطوں کے چار زوجوں سے جو چار خط حاصل ہوتے ہیں وہ ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

۱۲۔ تظلیل کے ذریعہ اِس مسئلہ کی تعمیم کرو کہ ایک مثلث کو محیط کرنیوالے قائم زائد کے مرکز کا طریق مثلث کا نو نقطی دائرہ ہوتا ہے۔

۱۳۔ تظلیل کے ذریعہ اِس مسئلہ کی تعمیم کرو کہ ایک قائم زائد کے مرکز کا طریق جسکے لحاظ سے ایک دیا ہوا مثلث خود مزدوج ہو مثلث کا حائط دائرہ ہوتا ہے۔

۱۴۔ دو علی القوائم خطوط اور دائری نقطوں تک کھینچے ہوئے خطوط ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔ کسی دائرہ کے لحاظ سے دائری نقطوں کے متکافی معلوم کرو۔ اس سے اخذ کرو کہ کسی نقطہ و اور دائری نقطوں کو ملانے والے خطوط، اِس نقطہ کے لحاظ سے کسی دائرہ کے قطبی متکافی کے مماس ہوتے ہیں اور دائرہ کے مرکز کا متکافی متناظر وتر تماس ہوتا ہے۔

۱۵۔ حسب ذیل مسئلہ کو ثابت کرو اور تظلیل کے ذریعہ اسکی تعمیم کرو۔

ایک مثلث کے حائط دائرہ کا مرکز جبکہ مثلث ایک مکافی کے لحاظ سے خود مزدوج ہو مکافی کے مرتب پر واقع ہوتا ہے۔

۱۶۔ ایک مثلث ا ب ج کے مستوی میں ن اور نَ دو نقطے ہیں۔ ب ج میں نقطہ د ایسا لیا گیا ہے کہ ج ب اور د ا، د ن

اور د نَ کے موسیقی مزدوج ہیں۔ اسی طرح ج ا اور ا ب میں علی الترتیب ع اور ف لئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا د، ب ع، ج ف ہم نقطہ ہیں۔

۱۷۔ تطلیل کے ذریعہ حسب ذیل مسئلہ کی تعمیم کرو۔

وہ خطوط جو ایک مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی میں سے گذرتے ہیں اور مثلث کے ضلعوں پر عمود ہیں مثلث کے حائط مرکز پر ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

(255) ۱۸۔ ایک مثلث کے حائط دائرہ کے کسی نقطہ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے پائین ہم خط ہوتے ہیں۔ اس مسئلہ کی تعمیم کرو۔

۱۹۔ اگر دو مخروطی، ا اور ب پر دوہرا تماس رکھیں اور اگر انمیں سے ایک کا وتر ن ق دوسرے کو ر پر مس کرے اور ا ب سے ت پر ملے تو

(ن ق ، ر ت) = -۱

۲۰۔ تطلیل کے ذریعہ اس مسئلہ کی تعمیم کرو کہ ہم ماسکی مخروطی ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔

۲۱۔ حسب ذیل مسئلہ کو ثابت کرو اور اسکی تعمیم کرو۔

ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے کسی دئے ہوئے نقطہ کے قطبی کا لفاف ایک قطع مکافی ہوتا ہے جو مخروطیوں کے محوروں کو مس کرتا ہے اور دیا ہوا نقطہ اس کے مرتب پر واقع ہوتا ہے۔

۲۲۔ اگر مخروطیوں کا ایک نظام، چار نقطوں ا، ب، ج، د میں سے گذرے تو اِن کے لحاظ سے خط ا ب کے قطب ایک خط ل پر واقع ہونگے۔ مزید بریں اگر یہ خط ل، ج د سے ن پر ملے تو ن ا اور ن ب، ج د اور ل کے موسیقی مزدوج ہونگے۔

۲۳۔ ایک ثابت نقطہ ت سے ایک مخروطی کے مماسوں کا زوج، مخروطی کے ایک تیسرے ثابت مماس سے نقطوں ل اور لَ پر ملتا ہے۔

مخروطی پر ن کوئی نقطہ ہے اور ن پر کے مماس پر ایک نقطہ لا ایسا لیا گیا ہے کہ لا (ن ت، ل لَ) = -۱۔ ثابت کرو کہ لا کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۲۴ — اگر مخروطی کے ماسکہ کی تعریف اس طرح کیجائے کہ وہ ایک نقطہ ہے جس پر مزدوج خطوں کا ہر زوج علی القوائم ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ ایک دائرہ کا قطبی مکانی بلحاظ دوسرے دائرہ کے ایک مخروطی ہے جسکا ایک ماسکہ دوسرے دائرہ کا مرکز ہے۔

اُنیسواں باب

انقلاب

۲۶۱ — ہم دفعہ ۱۲۳ میں یہ سمجھا چکے ہیں کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے "دو مقلوب" نقطوں کا کیا مطلب ہے۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے تو ن اور نَ مقلوب نقطے ہونگے اگر وہ ایک ہی نصف قطر پر واقع ہوں اور ون × ونَ = نصف قطر کا مربع۔ نقطے ن اور نَ مرکز کے ایک ہی جانب ہوتے ہیں سوائے اس صورت کے جبکہ دائرہ کا نصف قطر (= خ رک) خیالی ہو جہاں ک حقیقی ہے۔

جیسے ن ایک منحنی س کو مرتسم کرتا ہے نقطہ نَ دوسرے منحنی سَ کو مرتسم کریگا۔ منحنیوں س اور سَ کو مقلوب منحنی کہتے ہیں۔ و کو **انقلاب کا مرکز** کہتے ہیں اور دائرہ کے نصف قطر کو **انقلاب کا نصف قطر**۔

اگر ن سے ایک منحنی فضا میں مرتسم ہو جسکا مستوی منحنی ہونا ضروری نہیں ہے تو ہمیں نقطہ نَ کو و کے گرد ایک کرہ کے لحاظ سے ن کا مقلوب سمجھنا چاہیئے۔ یعنی خواہ ن ایک مستوی میں ہو یا نہ ہو نَ، ن کا مقلوب کہلائیگا اگر و فضا میں ایک ثابت نقطہ ہو اور

و ن پر نَ ایسا لیا گیا ہو کہ و ن × و نَ = مستقل $ک^2$ ۔ وہ منحنی یا سطح جسے ن مرتسم کرتا ہے اس منحنی یا سطح کا مقلوب کہلاتی ہے جسے نَ مرتسم کرتا ہے اور اس کے بالعکس ۔

بعض اوقات یہ کہنے میں سہولت ہوتی ہے کہ نَ ایک نقطہ و کے لحاظ سے ن کا مقلوب ہے ۔ اسکا یہ مطلب ہے کہ و اس دائرہ یا کرہ کا مرکز ہے جس کے لحاظ سے نقطے مقلوب ہیں ۔

۲۶۲ ۔ مسئلہ ۔ کسی دائرہ کا مقلوب ایک نقطہ کے لحاظ سے جو اسی مستوی میں ہو ایک دائرہ یا خط مستقیم ہوتا ہے

فرض کرو کہ انقلاب کا مرکز و' دائرہ پر واقع ہے ۔

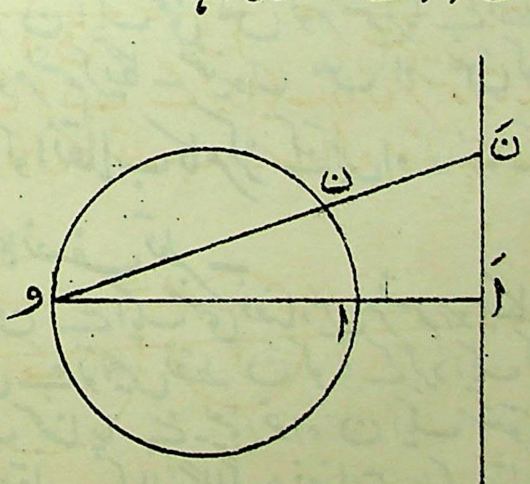
فرض کرو کہ انقلاب کا نصف قطر ک ہے ۔

قطر و ا کھینچو اور فرض کرو کہ ا کا مقلوب اَ ہے ۔

فرض کرو کہ دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہے اور اسکا مقلوب نَ ہے

اب و ن × و نَ = $ک^2$ = و ا × و اَ

∴ ن ا اَ نَ دائری ہے ۔



∴ زاویہ ا اَ نَ، زاویہ ا ن نَ کا تکملہ ہے جو ایک قائمہ زاویہ ہے۔

∴ اَ نَ، ا اَ پر عمود ہے۔

∴ نَ کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو و ا پر عمود ہے اور ا کے مقلوب میں سے گزرتا ہے۔

پھر فرض کرو کہ و، دائرہ کے محیط پر نہیں ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس کا مقلوب نَ ہے۔

فرض کرو کہ و ن، دائرہ کو مکرر ق پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ا، دائرہ کا مرکز ہے۔

اب $\text{ون} \times \text{ونَ} = \text{ک}^2$

اور $\text{ون} \times \text{وق}$ = و سے دائرہ کے مماس کا مربع = ت^2 (فرض کرو)

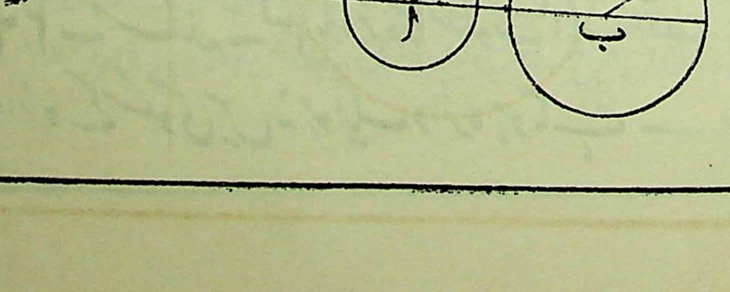
$$\therefore \frac{\text{ونَ}}{\text{وق}} = \frac{\text{ک}^2}{\text{ت}^2}$$

و ا پر نقطہ ب لو ایسا کہ $\frac{\text{وب}}{\text{وا}} = \frac{\text{ک}^2}{\text{ت}^2}$، اِس لئے ب ایک ثابت نقطہ ہے اور ب نَ، ا ق کے متوازی ہے۔

اور $\frac{\text{بنَ}}{\text{اق}} = \frac{\text{وب}}{\text{وا}} = \frac{\text{ک}^2}{\text{ت}^2}$، ایک مستقل

∴ نَ، ب کے گِرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔

اِسلئے دائرہ کا مقلوب دوسرا دائرہ ہوتا ہے۔



نتیجہ صریح ۱ — کسی خط مستقیم کا مقلوب ایک دائرہ ہوتا ہے جو انقلاب کے مرکز میں سے گذرتا ہے ۔

نتیجہ صریح ۲ — اگر دو دائرے ایک دوسرے کے لحاظ سے مقلوب ہوں تو انقلاب کا مرکز مشابہت کا مرکز ہوتا ہے (دفعہ ۲۵) اور دائروں کے نصف قطروں میں وہ نسبت ہوتی ہے جو و سے انکے مرکزوں کے فاصلوں میں ہے ۔

طالب علم کو یہ دیکھنا چاہیئے کہ اگر ہم اِن دو دائروں کو س اور سَ سے موسوم کریں اور اگر و ن ق، سَ سے ق پر ملے تو قَ، ق کا مقلوب ہوگا ۔

نوٹ — دائرہ س کا وہ حصہ جو و کی جانب محدب ہے دائرہ سَ کے اُس حصہ کے جواب میں ہوتا ہے جو و کی جانب مقعر ہے اور اِس کے بالعکس ۔

س اور سَ کے مشترک مماسوں میں سے دو مماس و میں سے گذرتے ہیں اور اِن مماسوں میں سے ہر ایک کے نقاط تماس مقلوب نقطے ہونگے ۔

۲۶۳ — مسئلہ ۔ کسی کرہ کا مقلوب کسی نقطہ کے لحاظ سے ایک کرہ یا ایک مستوی ہوتا ہے ۔

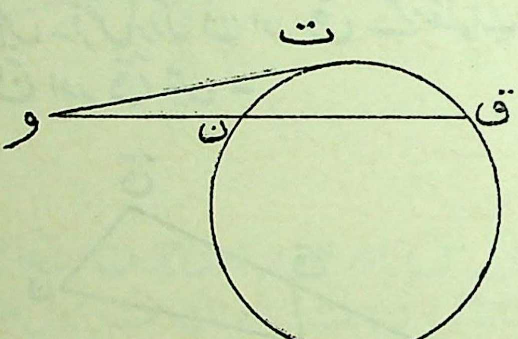
یہ مسئلہ مسئلہ سابق سے و ا کو محور مانکر اِس کے گرد شکلوں کو گھمانے سے فوراً حاصل ہوتا ہے ۔ پہلی شکل میں دائرہ اور خط ایک کرہ اور ایک مستوی کی تکوین کرینگے جنمیں سے ہر ایک دوسرے کا مقلوب ہوگا ۔ دوسری شکل میں دو دائرے دو کروں کی تکوین کرینگے جنمیں سے ہر ایک دوسرے کا مقلوب ہوگا ۔

۲۶۴ — مسئلہ ۔ کسی دائرہ کا مقلوب ایک نقطہ کے لحاظ سے جو دائرہ کے مستوی میں نہ ہو ایک دائرہ ہوتا ہے ۔

کیونکہ دائرہ کو دو کرُوں کا تقاطع سمجھا جا سکتا ہے اور اِن کرُوں میں سے کسی کا و میں سے گذرنا ضروری نہیں ہے۔

یہ کرُے کرُوں میں مقلوب ہونگے اور اِنکا تقاطع جو دوسرے دو کرُوں کے تقاطع کا مقلوب ہے (یعنی ابتدائی دائرہ کا مقلوب ہے) ایک دائرہ ہوگا۔

۲۶۵ — مسئلہ — کوئی دائرہ ایک نقطہ کے لحاظ سے جو اُسی مستوی میں ہو خود میں مقلوب ہوگا اگر انقلاب کا نصف قطر اُس مماس کا طول ہو جو انقلاب کے مرکز سے دائرہ تک کھینچا گیا ہے۔



یہ صریحًا ٹھیک ہے کیونکہ اگر و سے دائرہ کا مماس وت ہو اور ون ق دائرہ کو ن اور ق پر قطع کرے تو چونکہ $\text{ون} \times \text{وق} = \text{وت}^2$ اِس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن اور ق مقلوب نقطے ہیں۔

یعنے دائرہ کا وہ حصہ جو و کی جانب مقعر ہے اُس حصہ میں مقلوب ہوتا ہے جو و کی جانب محدب ہے اور اِس کے بالعکس۔

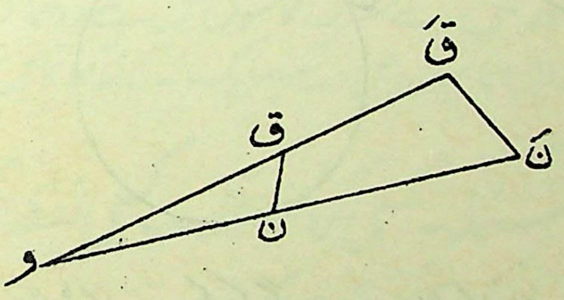
نتیجہ صریح ۱ — ہم محور دائروں کا کوئی نظام ایک ساتھ خود اُسی نظام کے دائروں میں مقلوب کیا جا سکتا ہے اگر انقلاب کا مرکز نظام کے محور پر ہو۔

نتیجۂ صریح ۲ ۔ کوئی تین ہم مستوی دائرے ایک ساتھ انہی دائروں میں مقلوب کئے جا سکتے ہیں ۔

کیونکہ ہمیں صرف اِن تین دائروں کے بنیادی مرکز کو انقلاب کا مرکز لینا ہوگا اور اِس سے اِنہیں سے کسی دائرہ کے مماس کو انقلاب کا نصف قطر ۔

۲٦٦ ۔ مسئلہ ۔ دو ہم مستوی منحنی اُسی زاویہ پر متقاطع ہوتے ہیں جس پر اِن کے مستوی میں کے کسی نقطہ کے لحاظ سے اِن کے مقلوب متقاطع ہوتے ہیں ۔ (260)

فرض کرو کہ ایک منحنی س پر ن اور ق ایک دوسرے سے قریب نقطے ہیں ۔ فرض کرو کہ ن اور ق کے مقلوب ایک نقطہ و کے لحاظ سے ن′ اور ق′ ہیں ۔



اب چونکہ و ن × و ن′ = ک² = و ق × و ق′

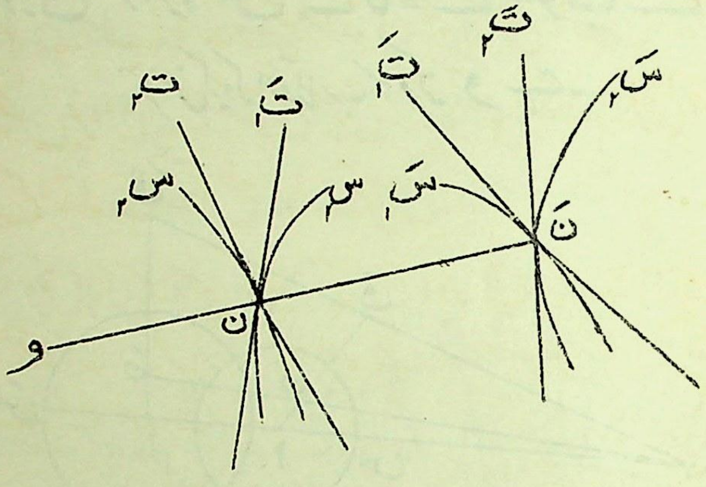
∴ ق ن ن′ ق′ دائری ہے ۔

∴ ∠ و ن ق = ∠ و ق′ ن′

اب فرض کرو کہ ق، ن تک حرکت کرتا ہے تو ن ق، ن پر س کا مماس ہو جاتا ہے اور اسی اثناء میں ق′، ن′ تک حرکت کرتا ہے اور ن′ ق′، ن′ پر مقلوب منحنی س′ کا مماس ہو جاتا ہے ۔

ث ن اور نَ پر کے مماس، و ن نَ کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

مگر یہ مماس ضد متوازی ہیں متوازی نہیں ہیں۔



اب اگر دو منحنی س۱ اور س۲ ہوں جو ن پر متقاطع ہوتے ہیں اور نقطہ ن پر انکے مماس ن ت۱ اور ن ت۲ ہوں اور اگر مقلوب منحنی سَ۱ اور سَ۲ ہوں جو نَ پر متقاطع ہوتے ہیں جو ن کا مقلوب ہے اور اِن کے مماس نقطہ نَ پر نَ تَ۱، نَ تَ۲ ہوں تو اوپر کے استدلال سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ∠ ت۲ ن ت۱ = ∠ تَ۱ نَ تَ۲ (261)

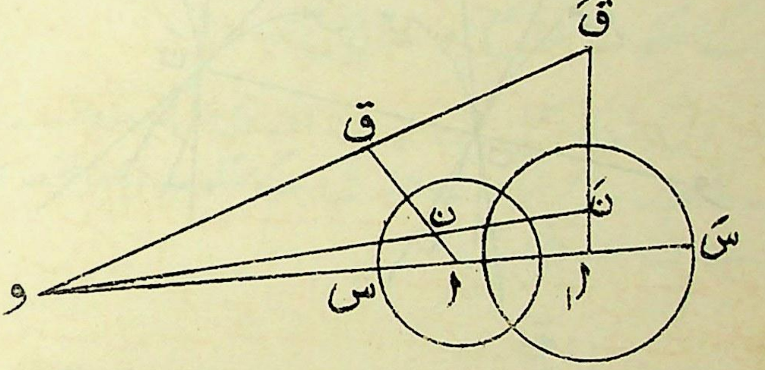
پس س۱ اور س۲ اسی زاویہ پر متقاطع ہوتے ہیں جس پر انکے مقلوب

نتیجۂ صریح۔ اگر دو منحنی ایک نقطہ ن پر مس کریں تو اِن کے مقلوب، ن کے مقلوب پر مس کرتے ہیں۔

۲۶۷۔ مسئلہ۔ اگر کسی دائرہ س کو دائرہ سَ میں

مقلوب کیا جائے اور نقطے ن اور ق ، دائرہ س کے لحاظ سے مقلوب نقطے ہوں تو ن اور ق کے مقلوب نقطے نَ اور قَ ، دائرہ سَ کے لحاظ سے مقلوب نقطے ہونگے۔

فرض کرو کہ انقلاب کا مرکز و ہے۔



چونکہ س کے لحاظ سے ن اور ق مقلوب نقطے ہیں اس لئے س ، ن اور ق میں سے گذرنیوالے ہر دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے اور بالخصوص اُس دائرہ کو جو و ، ن ، ق میں سے گذرتا ہے۔

اس لئے دائرہ و ن ق کا مقلوب ، سَ کو علی القوائم قطع کریگا لیکن و ن ق کا مقلوب ایک خط مستقیم ہے کیونکہ انقلاب کا مرکز و محیط پر واقع ہے۔

اِس لئے نَ قَ ، دائرہ و ن ق کا مقلوب ہے
اِس لئے نَ قَ ، دائرہ سَ کو علی القوائم قطع کرتا ہے یعنی سَ کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

پھر چونکہ ن اور ق میں سے گذرنیوالا ہر دائرہ س کو علی القوائم قطع کرتا ہے اِس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نَ اور قَ میں سے گذرنیوالا ہر دائرہ

سَ کو علی القوائم قطع کرتا ہے (دفعہ ۲۲۶)

اِس لئے اگر سَ کا مرکز اَ ہو تو

اَنَ × اَقَ = سَ کے نصف قطر کا مربع

اسلئے نَ اور قَ، دائرہ سَ کے لحاظ سے مقلوب نقطے ہیں۔

۲۶۸ — مسئلہ — غیر قاطع ہم محور دائروں کا کوئی نظام ہم مرکز دائروں میں مقلوب کیا جا سکتا ہے۔

نظام چونکہ غیر قاطع ہے اِس لئے انتہائی نقطے ل اور لَ حقیقی ہیں

اِس نظام کو ل کے لحاظ سے مقلوب کرو۔

اب چونکہ ل اور لَ، نظام کے ہر دائرہ کے لحاظ سے مقلوب نقطے ہیں اسلئے اِن کے مقلوب، انقلاب میں ہر دائرہ کے لئے مقلوب نقطے ہونگے۔

لیکن ل چونکہ انقلاب کے دائرہ کا مرکز ہے اس لئے اِسکا مقلوب لاانتہا ہی پر ہے۔ اس لئے لَ، ہر دائرہ کے مرکز میں مقلوب ہونا چاہئے۔

۲۶۹ — فویرباخ (Feuerbach) کا مسئلہ۔

انقلاب کے اصولوں کی وضاحت اِن کو فویرباخ کے مسئلہ کے ثبوت میں استعمال کر کے کیجا سکتی ہے۔ مسئلہ حسب ذیل ہے:

کسی مثلث کا نو نقطی دائرہ مثلث کے اندرونی اور تین جانبی دائروں کو مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلث ہے، ع اِسکا اندرونی مرکز اور ع۱ اِس کا وہ جانبی مرکز ہے جو ا کے مقابل ہے۔

فرض کرو کہ اندرونی دائرہ اور اِس جانبی دائرہ کے نقاط تماس ضلع ب ج کے ساتھ م اور م۱ ہیں۔

فرض کرو کہ خط ا ع ع۱ جو زاویہ ا کی تنصیف کرتا ہے ب ج کو ر پر قطع کرتا ہے۔

ا ل، ب ج پر عمود کھینچو۔ فرض کرو کہ حائط مرکز، عمودی مرکز اور نو نقطی مرکز علی الترتیب و، ف، ع ہیں۔

و د، ب ج پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ وہ حائط دائرہ سے ک پر ملتا ہے۔

اب چونکہ ب ع اور ب ع۱، زاویہ ب کے اندرونی اور بیرونی ناصف ہیں اس لئے

(ا ر، ع ع۱) = -۱

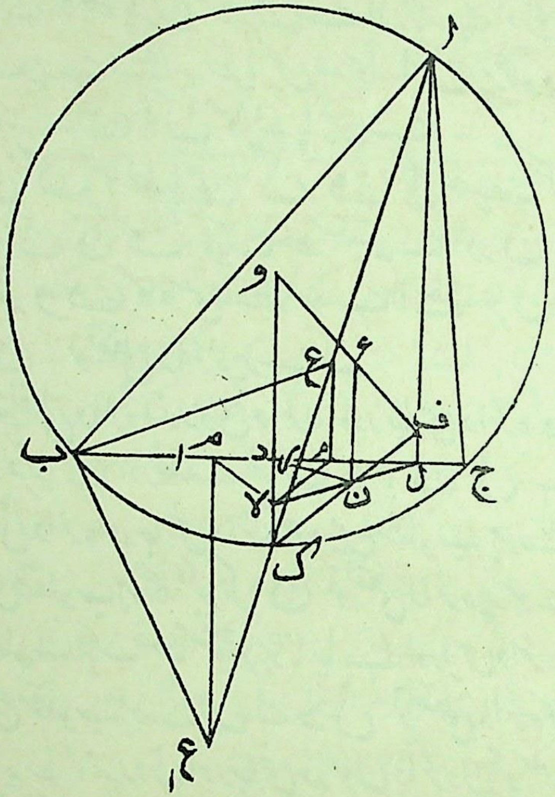
∴ ل (ا ر، ع ع۱) = -۱

∴ چونکہ ر ل ا ایک قائمہ زاویہ ہے، ل ع اور ل ع۱، ب ج کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں (دفعہ ۲۷ نتیجہ صریح ۲)

∴ اندرونی دائرہ اور جانبی دائرہ کے لحاظ سے ل کے قطبی، ب ج کے ساتھ مساوی میلان رکھینگے۔ (263)

اب اندرونی دائرہ کے لحاظ سے ل کا قطبی، م میں سے گذرتا ہے اور جانبی دائرہ کے لحاظ سے اس کا قطبی م۱ میں سے گذرتا ہے۔

فرض کرو کہ اندرونی دائرہ کے لحاظ سے ل کا قطبی م لا ہے جو و د کو لا پر قطع کرتا ہے۔



اب چونکہ د، م م۱ کا وسطی نقطہ ہے (دفعہ ۱۲ نتیجہ صریح) اس لئے

$$\triangle\,\text{لا م د} \equiv \triangle\,\text{لا م}_1\,\text{د}$$

$$\therefore \angle\,\text{لا م د} = \angle\,\text{لا م}_1\,\text{د}$$

∴ جانبی دائرہ کے لئے ل کا قطبی م۱ لا ہے یعنی ل اور لا، دونوں دائروں کے لئے مزدوج نقطے ہیں۔

فرض کرو کہ لا ل کا وسطی نقطہ ن ہے تو ن سے دونوں دائروں کے مماس کا مربع $= \text{ن لا}^2 = \text{ن د}^2$

∴ ن، اِن دو دائروں کے بنیادی محور پر ہے لیکن یہی حال د کا ہے کیونکہ $\text{د م} = \text{د م}_1$ ۔

∴ ن د بنیادی محور ہے اور وہ ع ع پر عمود ہے۔

اب ک کا خط پائین، د میں سے گزرتا ہے اور چونکہ ک، زاویہ ا کے ناصف پر ہے اسلئے یہ خط پائین صریحاً ا ک پر عمود ہونا چاہئے۔

∴ د ن، ک کا خط پائین ہے۔

لیکن ک کا خط پائین، ک ف کی تنصیف کرتا ہے۔

∴ ک ن ف ایک خط مستقیم ہے اور ن اسکا وسطی نقطہ ہے

اور چونکہ و ف کا وسطی نقطہ ع ہے اسلئے ع ن = $\frac{1}{2}$ و ک

∴ ن، نونقطی دائرہ پر ہے۔

اب نونقطی دائرہ اندرونی دائرہ، اور جانبی دائرہ کو اُس دائرہ کے لحاظ سے جسکا مرکز ن اور نصف قطر ن د یا ن ل ہے مقلوب کرو۔

اندرونی دائرہ اور جانبی دائرہ خود میں مقلوب ہونگے اور نونقطی دائرہ خط ب ج میں مقلوب ہوگا، کیونکہ ن نونقطی دائرہ پر ہونے کی وجہ سے اِس دائرہ کا مقلوب ایک خط مستقیم ہونا چاہئے اور اِس دائرہ کے نقطے د اور ل خود میں مقلوب ہوتے ہیں لہٰ د ل، نونقطی دائرہ کا مقلوب ہے۔

لیکن یہ خط، اندرونی اور جانبی دونوں دائروں کو مس کرتا ہے۔

∴ نونقطی دائرہ، اندرونی اور جانبی دونوں دائروں کو مس کرتا ہے۔

اسی طرح وہ دوسرے دو جانبی دائروں کو مس کرتا ہے۔

نتیجہ صریح ۔ نونقطی دائرہ اور اندرونی دائرہ کا نقطہ تماس م کا مقلوب ہوگا اور نونقطی دائرہ اور جانبی دائرہ کا نقطہ تماس م۱ کا مقلوب ہوگا

مثالیں

۱ ۔ ثابت کرو کہ قاطع ہم محور دائروں کا کوئی نظام ہم نقطہ خطوط مستقیم میں مقلوب کیا جا سکتا ہے۔

۲ ۔ ایک کرہ کو اس کی سطح پر کے ایک نقطہ سے مقلوب کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ کی سطح پر کے نصف النہاروں اور توازیوں کے کسی نظام کے جواب میں مقلوب

شکل میں ہم محور دائروں کے دو نظامات ہونگے۔ [دیکھو دوسرا باب مثال ۱۶]

۳۔ اگر چار ہم خط نقطے ا، ب، ج، د ہوں اور اِن کے مقلوب نقطے ا′، ب′، ج′، د′ ہوں تو

$$\frac{\text{اج} \times \text{ب د}}{\text{اب} \times \text{ج د}} = \frac{\text{ا′ج′} \times \text{ب′د′}}{\text{ا′ب′} \times \text{ج′د′}}$$

۴۔ اگر ہم محور دائروں کے ایک نظام کے مستوی میں ن کوئی نقطہ ہو اور اِس نظام کے مختلف دائروں کے لحاظ سے ن کے مقلوب نقطے ن_1، ن_2، ن_3 وغیرہ ہوں تو ن_1، ن_2، ن_3 وغیرہ ہم دائری ہونگے۔

۵۔ اگر ہم محور دائروں کے ایک نظام کے مستوی میں ن ایک نقطہ ہو اور اِس نظام کے ایک دائرہ کے لحاظ سے ن کا مقلوب ن′ ہو اور دوسرے دائرہ کے لحاظ سے ن′ کا مقلوب ن″ ہو اور تیسرے دائرہ کے لحاظ سے ن″ کا مقلوب ن‴ ہو اور علیٰ ہذا القیاس تو ن، ن′، ن″ وغیرہ ہم دائری ہونگے۔

۶۔ ایک دائرہ کے دو وتر ن و ن′ اور ق و ق′ ہیں اور و ایک ثابت نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ دائروں ن و ق اور ن′ و ق′ کے دوسرے تقاطع کا طریق ایک دوسرا ثابت دائرہ ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ کسی ہم محور نظام کے دائروں کی طاق تعداد کو مقلوب کرنیکا نتیجہ نظام کے ایک دائرہ کے واحد انقلاب کے مماثل ہے۔ نیز اِس طرح وہ دائرہ معلوم کرو جو ایک دی ہوئی ترتیب میں تین دئے دائروں کے مماثل ہے۔

۸۔ اگر وہ دائرے جو ایک دئے ہوئے نقطہ ن کے لحاظ سے دائروں ا ج د اور ب ج د کے مقلوب ہیں مساوی ہوں تو دائرہ ن ج د، دئے ہوئے دو دائروں کے زوایائے تقاطع کی (داخلاً اور خارجاً) تنصیف کریگا۔

۹۔ تین دائرے نقطوں کے تین ازواج ا ا′، ب ب′، ج ج′ پر ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا ب ج، ا′ ب ج′ میں سے گذرنیوالے دائرے ا پر مس کرتے ہیں۔

۱۰۔ اگر نو نقطی دائرہ اور مثلث کا ایک زاویہ دئے جائیں تو ثابت کرو کہ

عمودی مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۱۱ — ثابت کرو کہ کسی مثلث کا نو نقطی دائرہ اُن تین مثلثوں کے اندرونی اور جانبی دائروں کو مس کرتا ہے جو مثلث کے راسوں کو عمودی مرکز کے ساتھ ملانے سے بنتے ہیں۔

۱۲ — دو دائروں $ج_1$ اور $ج_2$ کے لحاظ سے ایک دی ہوئی شکل کی مقلوب شکلیں علی الترتیب $س_1$ اور $س_2$ سے تعبیر کیگئی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر $ج_1$ اور $ج_2$ علی القوائم متقاطع ہوں تو $س_1$ کا مقلوب بلحاظ $ج_2$ وہی ہوگا جو $س_2$ کا مقلوب بلحاظ $ج_1$ کے ہے۔

۱۳ — اگر ا، ب، ج تین ہم خط نقطے ہوں اور و کوئی دوسرا نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ و ب ج، و ج ا، اور و ا ب کے حائط دائروں کے مرکز ن، ق، ر نقطہ و کے ساتھ ہم دائری ہونگے۔

نیز اگر تین دوسرے دائرے، و اور ا؛ و اور ب؛ و اور ج میں سے گذرتے ہوئے کھینچے جائیں جو بالترتیب و ب ج، و ج ا، و ا ب کو علی القوائم قطع کریں تو یہ دائرے ایک ایسے نقطہ پہ ملینگے جو چار ضلعی و ن ق ر کے حائط دائرہ پر واقع ہوگا۔

۱۴ — ثابت کرو کہ اگر دائرہ ن ا ب، دائرہ ن ج د کو اور دائرہ ن ا ج، دائرہ ن ب د کو علی القوائم قطع کرے تو دائرہ ن ا د، دائرہ ن ب ج کو علی القوائم قطع کریگا۔

۱۵ — ایک مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کے ساتھ نو نقطی دائرہ کا نقطہ تماس حاصل کرنے کے لئے حسب ذیل عمل ثابت کرو:

زاویہ ا کا ناصف، ب ج سے ھ پہ ملتا ہے۔ ھ سے اندرونی دائرہ کا دوسرا مماس ھ ما کھینچا گیا ہے۔ اِس مماس کے نقطہ تماس ما کو ب ج کے وسطی نقطہ د کے ساتھ ملایا گیا ہے تو ملانیوالا یہ خط اندرونی دائرہ کو مکرر مطلوبہ نقطہ پہ قطع کریگا۔

۱۶ — ایک مثلث کا حائط دائرہ اور اندرونی دائرہ دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مرکز ہندسی کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۱۷ — ا، ب، ج تین دائرے ہیں اور ان کے مقلوب کسی دوسرے دائرہ کے لحاظ سے ا́، ب́، ج́ ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ا اور ب، ج کے لحاظ سے مقلوب ہوں تو ا́ اور ب́، ج́ کے لحاظ سے مقلوب ہونگے۔

۱۸ — ایک دائرہ س کو ایک خط میں مقلوب کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط، س اور انقلاب کے دائرہ کا بنیادی محور ہے۔

۱۹ — ثابت کرو کہ ایک دائرہ اور اس کے مقلوب کا درمیانی زاویہ انقلاب کے دائرہ سے تنصیف ہوتا ہے۔

۲۰ — ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر عمود ا ل، ب م، ج ن کھینچے گئے ہیں جو مرکز عمودی ک پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ک م ا ن، ک ن ب ل اور ک ل ج م کے گرد کھینچے ہوئے تین دائروں کو مس کرنے والے چار دائروں میں سے ہر ایک مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کو مس کرتا ہے۔

[مرکز ک کے ذریعہ ان تین دائروں کو مثلث کے اضلاع میں اور حائط دائرہ کو نو نقطی دائرہ میں مقلوب کرو]

۲۱ — دو کروں کو جنمیں سے ایک بالکلیہ دوسرے کے اندر واقع ہے ہم مرکز کروں میں مقلوب کرو۔

۲۲ — دفعہ ۲۶۷ کے مسئلہ کی خاص صورت کا امتحان کرو جہاں انقلاب کا مرکز و، س پر واقع ہے۔

۲۳ — اگر ا، ن، ق تین ہم خط نقطے ہوں اور اگر و کے لحاظ سے ن، ق کے مقلوب ن̄، ق̄ ہوں اور اگر ن̄ ق̄، و ا سے ا́ پر ملے تو

$$\frac{\text{وا}^{2}}{\text{وا́}^{2}} = \frac{\text{ا́ن}\times\text{ا́ق}}{\text{ا ن̄}\times\text{ا ق̄}}$$

۴۲ — ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع ا ب، ا ج کو مس کرتا ہے اور حائط دائرہ کو داخلاً ع پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا ع اور وہ خط جو ا کو اِس کے مقابل کے جانبی دائرہ اور ب ج کے نقطہ تماس کے ساتھ ملاتا ہے ا ب اور ا ج کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں۔

[ا کو مرکز مانکر مقلوب کرو، اس طرح ج خود میں مقلوب ہوگا]

بیسواں باب

اشکال کی مشابہت

۲۷۰ — ہم وضع اشکال ـ

اگر ش ایک مستوی شکل ہو جسے ہم ن کے نمونہ کے نقطوں کا ایک اجتماع سمجھ سکتے ہیں اور اگر اس مستوی میں و ایک ثابت نقطہ ہو اور اگر ہر سمتی نیم قطر و ن (ممدودہ بشرط ضرورت) پر ایک نقطہ نَ ایسا لیا جائے جو اسی جانب ہو جس جانب و سے اور و ن : و نَ مستقل (= ک) ہو تو نَ سے ایک دوسری شکل شَ کی ترسیم ہوگی جسے ہم ش کے متشابہ اور متشابہاً واقع کہینگے ـ

دو ایسی شکلوں کو ایک لفظ "ہم وضع" سے موسوم کرنے میں سہولت ہے۔ نقطہ و کو ہم وضع مرکز کہتے ہیں ـ

ہم دیکھتے ہیں کہ دو ہم وضع شکلیں منظرہ میں ہوتی ہیں اور منظرہ کا مرکز ہم وضع مرکز ہوتا ہے ـ

۲۷۱ — مسئلہ ـ وہ خط جو شکل ش کے دو نقطوں کو ملاتا ہے اُس خط کے متوازی ہوتا ہے جو ہم وضع شکل شَ کے

نظیری نقطوں کو ملاتا ہے اور اِن خطوں میں ایک مستقل نسبت ہوتی ہے

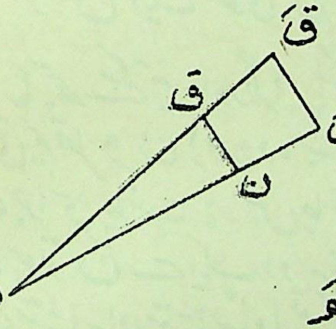
کیونکہ اگر ش میں ن اور ق دو نقطے ہوں اور شَ میں نظیری نقطے نَ اور قَ تو چونکہ و ن : و نَ = و ق : و قَ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن ق اور نَ قَ متوازی ہیں اور ن ق : نَ قَ = و ن : و نَ = مستقل ۔

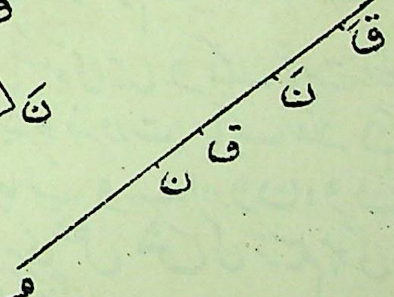
اُس صورت میں بھی جبکہ قَ ، خط و ن میں ہو یہ درست ہے کہ ن ق : نَ قَ = مستقل نسبت ، کیونکہ و ن : و ق = و نَ : و قَ

∴ و ن : و ق ۔ و ن = و نَ : و قَ ۔ و نَ

∴ و ن : ن ق = و نَ : نَ قَ

∴ ن ق : نَ قَ = و ن : و نَ (268)





نتیجہ صریح ۔ اگر شکلیں ش اور شَ ، منحنی س اور سَ ہوں تو نظیری نقطوں ن اور نَ پر اِنکے مماس متوازی ہونگے ۔ کیونکہ ن پر کا مماس اُس خط کا انتہائی محل ہوتا ہے جو ن اور ایک قریبی نقطے ق میں سے گذرتا ہے اور اسی طرح نَ پر کا مماس اُس خط کا انتہائی محل ہے جو نظیری نقطوں نَ اور قَ میں سے گذرتا ہے ۔

۲۷۲ ۔ مسئلہ ۔ دو ہم وضع شکلوں کا ہم وضع مرکز نظیری

نقطوں کے دو زوجوں سے متعین ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر نظیری نقطوں کے دو زوج ن، نَ اور ق، قَ دئے گئے ہوں تو و، ن نَ اور ق قَ کا نقطہ تقاطع ہوگا۔

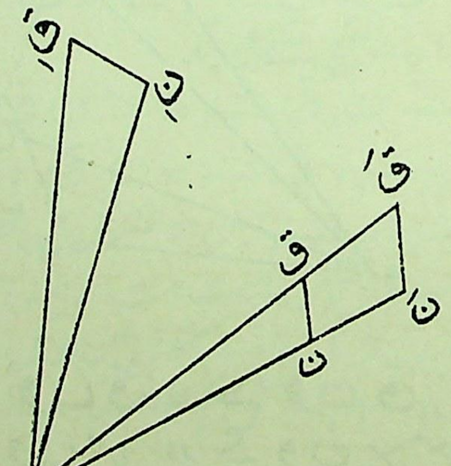
یا اس صورت میں جبکہ ق، خط ن نَ میں ہو تو اس خط میں و کی تعین مساوات و ن: و نَ = ن ق: نَ قَ سے ہوگی۔

اِس طرح سے ایک اور صرف ایک نقطہ و معلوم ہوتا ہے کیونکہ و ن اور و نَ کی ایک ہی علامت ہونی چاہئے یعنی وہ ایک ہی سمت میں ہونے چاہئیں۔

۲۷۳۔ راست مشابہ شکلیں۔

اب اگر دو شکلیں ش اور شَ ہم وضع ہوں اور ہم وضع مرکز و ہو اور اگر شکل شَ کو اس کے مستوی میں و کے گرد کسی زاویہ میں گھمایا جائے تو ایک نئی شکل ش، حاصل ہوگی جو ش کے مشابہ ہوگی لیکن متشابہاً واقع نہیں ہوگی۔

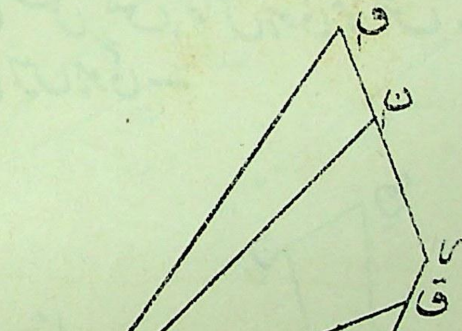
(269)



دو ایسی شکلیں ش اور ش۱ راست مشابہ کہلاتی ہیں اور و کو ان شکلوں کا مشابہت کا مرکز کہتے ہیں۔

دو راست مشابہ شکلیں یہ خاصیت رکھتی ہیں کہ اُن خطوں کا درمیانی زاویہ ن و ن۱ جو و کو دو نظیری نقطوں ن اور ن۱ سے ملاتے ہیں مستقل ہوتا ہے۔ نیز و ن : و ن۱ مستقل ہوتا ہے اور ن ق : ن۱ ق۱ = وہی مستقل، نیز مثلثات و ن ق اور و ن۱ ق۱ مشابہ ہوتے ہیں۔

۲۷۴ — مسئلہ — اگر دو راست مشابہ شکلوں کے نظیری نقطوں کے دو زوج ن، ن۱ اور ق، ق۱ ہوں اور اگر ن ق اور ن۱ ق۱، ر پر متقاطع ہوں تو دائروں ن ر ن۱، ق ر ق۱ کا دوسرا نقطہ تقاطع و ہوگا۔



چونکہ ∠ و ن ق = ∠ و ن۱ ق۱

∴ ∠ و ن ر اور ∠ و ن۱ ر متکملہ ہیں۔ (270)

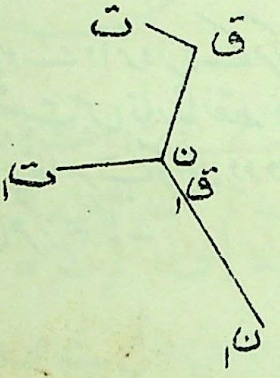
∴ ن و ن۱ ر دائری ہے۔

اسی طرح ق۱ و ق ر دائری ہے۔

اس لئے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

نتیجۂ صریح — دو راست مشابہ شکلوں کا مشابہت کا مرکز نظیری نقطوں کے دو زوجوں سے متعین ہوتا ہے۔

یہاں تک یہ مان لیا گیا ہے کہ ن نہ تو ن۱ پر اور نہ ق۱ پر منطبق ہوتا ہے۔



اگر ن، ن۱ پر منطبق ہو تو یہ نقطہ خود مشابہت کا مرکز ہے۔

اگر ن، ق۱ پر منطبق ہو تو ہم ق اور ق۱ میں سے ق ت اور ق۱ ت۱ ایسے کھینچ سکتے ہیں کہ

∠ ن ق۱ ت۱ = ∠ ن ق ت

اور ق۱ ت۱ : ق ت = ن ق۱ : ن ق

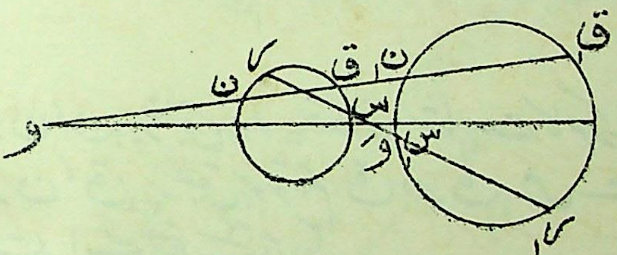
اب ت اور ت۱، اِن دو شکلوں میں نظیری نقطے ہیں۔

۲۷۵ — جب دو شکلیں راست مشابہ ہوں اور نظیری نقطوں کے ہر زوج کے دو رکن و کی مخالف سمتوں میں ہوں اور و کے ہم خط ہوں تو اِن شکلوں کو ضِد ہم وضعی کہا جا سکتا ہے اور مشابہت کے مرکز کو ضِد ہم وضعی مرکز کہتے ہیں۔

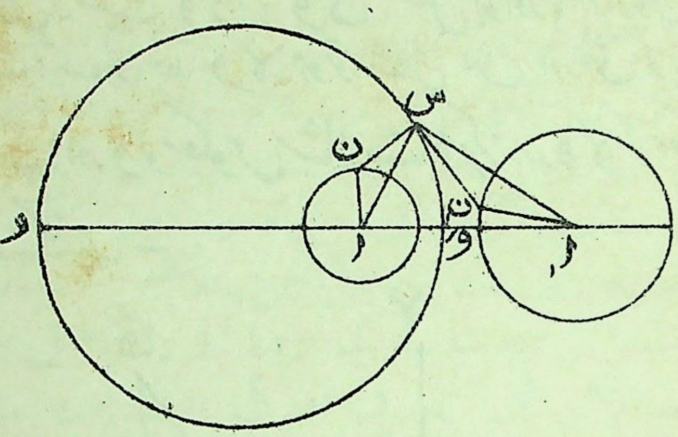
جب دو شکلیں ضد ہم وضعی ہوں تو ایک شکل کے دو نقطوں ن اور ق کو ملانیوالا خط اُس خط کے متوازی ہوتا ہے جو دوسری شکل کے نظیری نقطوں نَ اور قَ کو ملاتا ہے لیکن ن ق اور نَ قَ مخالف سمتوں میں ہوتے ہیں۔

۲۷۶ ـ دو ہم مُستوی دائروں کی صورت۔ (271)

اگر ہم دو دئے ہوئے دائروں کے مرکزوں کو ملانے والے خط کی تقسیم نصف قطروں کی نسبت میں خارجاً نقطہ و پر اور داخلاً نقطہ وَ پر کریں تو دفعہ ۲۵ سے یہ ظاہر ہے کہ اِن دو دائروں کے لئے و ہم وضعی مرکز اور وَ ضدِ ہم وضعی مرکز ہوگا۔



ہم نے قبل ازیں اِن نقطوں کو "مشابہت کے مرکز" کہا ہے لیکن اب ہم دیکھتے ہیں کہ وہ صرف مشابہت کے مخصوص مراکز ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ مشابہت کے دوسرے مراکز بھی ہیں جو اِن نقطوں کے خط میں واقع نہیں ہیں۔ فرض کرو کہ ایک دائرہ کا مرکز ا ہے اور اس کے جواب میں دوسرے دائرہ کا مرکز اَ ہے تو ہم ایک دائرہ کے کسی نقطہ ن کو دوسرے دائرہ کے کسی نقطہ نَ کی نظیر میں لے سکتے ہیں۔



فرض کرو کہ اس تناظر کے لئے مشابہت کا مرکز س ہے۔ مثلثات ن س ا، ن۱ س ا۱ مشابہ ہیں اور س ا : س ا۱ = ا ن : ا۱ ن۱ = نصف قطروں کی نسبت

اِس لئے س اُس دائرہ پر واقع ہے جو و وَ پر اِسے قطر مانکر کھینچا گیا ہے (دفعہ ۲۷) (272)

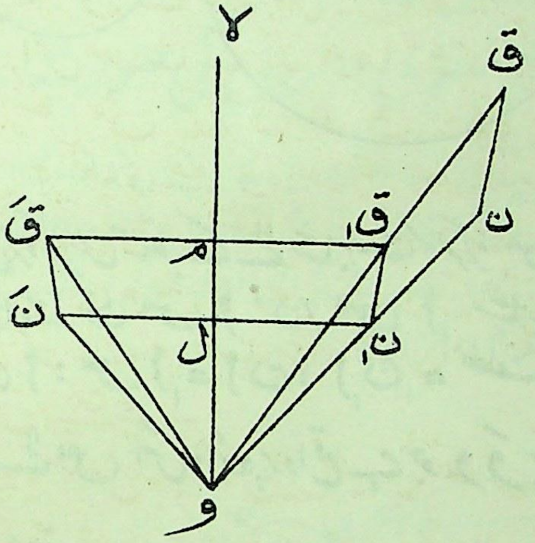
اِس لئے دو ہم مستوی دائروں کے لئے مشابہت کے مرکزوں کا طریق وہ دائرہ ہے جو ہم وضعی اور ضد ہم وضعی مرکزوں کو ملانیوالے خط پر بنایا گیا ہو۔

اِس دائرہ کو ہم مشابہت کا دائرہ کہہ چکے ہیں اور طالب علم اب سمجھ گیا ہوگا کہ اس کا یہ نام رکھنے کا سبب کیا ہے۔

۲۷۷ — بالعکس مشابہ اشکال۔

اگر ایک مستوی میں ش ایک شکل ہو اور اِس مستوی میں و ایک ثابت نقطہ ہو اور اگر دوسری شکل شَ اِس طور پر حاصل کیجائے کہ شکل ش کے نقطوں ن کے جواب میں اُسی مستوی میں نقطے نَ ایسے

لئے جائیں کہ نسبت ون : ونَ مستقل ہو اور تمام زاویوں ن و نَ کا ناصف ایک ہی خط ولا ہو تو اشکال ش اور شَ کو بالعکس مشابہ کہا جاتا ہے، اور و کو معکوس مشابہت کا مرکز اور ولا کو معکوس مشابہت کا محور کہتے ہیں۔



نَ ل، محور ولا پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ وہ، ون سے ن۱ پر ملتا ہے۔

چونکہ ولا، ﮮ ن و نَ کی تنصیف کرتا ہے اسلئے صریحاً

Δ ول نَ ≡ Δ ول ن۱

اور ون۱ = ونَ

ون۱ : ون مستقل ہے

اس لئے وہ شکل ش جو نقطوں ن۱ سے بنتی ہے شکل ش کے ہم وضعی ہے۔ (273)

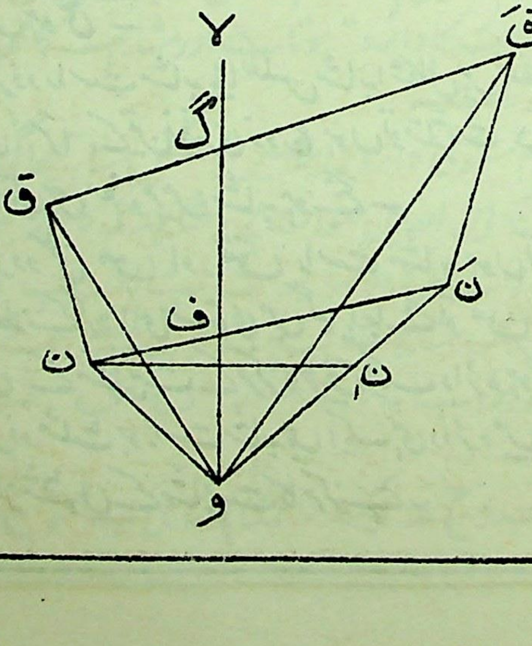
شکل شَ کے متعلق بلاشبہ یہ سمجھا جا سکتا ہے کہ وہ شکل ش۱ سے جو ش کے ہم وضعی ہے ش۱ کو محور ولا کے گرد دو قائمہ زاویوں میں سے

گھمانے سے بنی ہے۔

طالب علم کو بطور خود یہ ثابت کرنے میں کوئی مشکل نہیں ہوگی کہ اگر ش اور شَ کے مستوی ہیں۔ و میں سے گذرنیوالا کوئی خط وما لیا جائے اور اگر نَ کَ، وما پر عمود کھینچا جائے اور اِسے ن۲ تک اِس طور پر خارج کیا جائے کہ نَ کَ = کَ ن۲ تو نمونہ ن۲ کے نقطوں سے جو شکل بنے گی وہ ش کے مشابہ ہوگی لیکن یہ دو شکلیں متشابہاً واقع نہیں ہونگی سوائے اس صورت کے جبکہ وما، ولا پر منطبق ہو۔

۲۷۸ — اگر شکل ش میں ن اور ق دو نقطے ہوں اور بالعکس مشابہ شکل شَ میں نظیری نقطے نَ اور قَ ہوں تو آسانی سے یہ معلوم ہوگا کہ نَ قَ : ن ق = مستقل نسبت = و ن : و نَ اور ہم دیکھتے ہیں کہ زاویہ ن و ق = زاویہ قَ و نَ (نہ کہ زاویہ نَ و قَ)۔ اِس آخری نکتہ سے ہم راست مشابہ اشکال اور بالعکس مشابہ اشکال کے درمیان فرق دیکھتے ہیں۔

۲۷۹ — دو بالعکس مشابہ اشکال میں نظیری نقطوں کے دو زوج دیے گئے ہوں تو مشابہت کا مرکز اور محور معلوم کرنا۔



اِس مسئلہ کو حل کرنیکے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ن نَ، محور و لا (274)
کو ف پر قطع کرے تو ن ف : ف نَ = و ن : و نَ کیونکہ
محور زاویہ ن و نَ کی تنصیف کرتا ہے۔

∴ ن ف : ف نَ = ن قَ : نَ قَ

اسلئے اگر ن، نَ، ق، قَ دئے گئے ہیں تو ن نَ اور ق قَ
کو ملاؤ اور اِن خطوں کو ف اور گ پر نسبت ن ق : نَ قَ میں
تقسیم کرو تو خط ف گ محور ہوگا۔

نقطہ ن، محور کی دوسری جانب نقطہ ن کے متشاکل لو تو نقطہ
و، نَ ن، اور محور کے تقاطع سے معلوم ہوگا۔

نوٹ۔ اگر طالب علم کو مشابہ اشکال کے مضمون پر اِس سے زیادہ
مکمل بحث کے مطالعہ کا شوق ہو جو یہاں درج ہے تو اُسے لاکلان
(Lachlan) کی کتاب (Modern pure Geometry) کا نواں باب
مطالعہ کرنا چاہئے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ اگر ہم وضعی اشکال کی قائم تظلیل کیجائے تو وہ ہم وضعی
اشکال میں مظلل ہونگی۔

۲۔ اگر دو راست مشابہ یا بالعکس مشابہ اشکال میں نقطوں ن، نَ،
ق، قَ، ر، رَ کے تین نظیری زوج ہوں تو مثلثات ن ق ر اور
نَ قَ رَ اقلیدسی مفہوم میں مشابہ ہونگے۔

۳۔ اگر دو منحنی س اور سَ راست مشابہ ہوں تو ثابت کرو کہ اگر
س کو کسی نقطہ کے گرد اُسی مستوی میں گھمایا جائے تو س کے مختلف محلوں میں
س اور سَ کے مشابہت کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔

۴۔ اگر دو مثلث جو راست مشابہ ہیں ایک ہی دائرہ میں کھینچے جائیں تو ثابت
کرو کہ دائرہ کا مرکز مثلثوں کے مشابہت کا مرکز ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اِن مثلثوں کے نظیری اضلاع کے ازواج ایسے نقطوں میں منقاطع ہوتے ہیں جن سے بننے والا مثلث دئے ہوئے دو مثلثوں کے راست مشابہ ہوتا ہے۔

۵ — اگر دو مثلث ایک ہی دائرہ میں ایسے کھینچے جائیں کہ وہ بالعکس متشابہ ہوں تو ثابت کرو کہ وہ منظرہ میں ہیں اور منظرہ کا محور دائرہ کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

٦ — اگر ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر نقطے لا، ما، ے ایسے لئے جائیں کہ مثلث لا ما ے مستقل شکل کا ہو تو ایسے مثلثوں کے نظام کے مشابہت کے مرکز کا طریق معلوم کرو اور ثابت کرو کہ مثلث لا ما ے کے مرکز عمودی کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۷ — اگر ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر تین نقطے لا، ما، ے راسوں ا، ب، ج کے مقابل لئے جائیں اور اگر تین متشابہ اور متشابہاً واقع قطعات ناقص مثلثات ا ما ے، ب ے لا، ج لا ما کے گرد کھینچے جائیں تو اِن قطعات ناقص میں ایک نقطہ مشترک ہوگا۔

۸ — دو دئے ہوئے دائروں کا مشابہت کا دائرہ اُس ہم محور نظام سے متعلق ہوتا ہے جس کے انتہائی نقطے دئے ہوئے دو دائروں کے مرکز ہوتے ہیں۔

۹ — اگر دو ہم مستوی دائرے بالعکس مشابہ سمجھے جائیں تو مشابہت کے مرکز کا طریق "مشابہت کا دائرہ" ہوتا ہے اور مشابہت کا محور ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۰ — دو ہم مستوی دائروں پر جنہیں بالعکس مشابہ سمجھا گیا ہے دو نظیری نقطے ن اور نَ ہیں اور اِس صورت میں مشابہت کا مرکز س ہے۔ ن میں سے گذرنے والے قطر کا دوسرا سِرا ق ہے اور جب ق اور نَ اِن دو شکلوں میں معکوس مشابہت کے لئے نظیری نقطے ہوتے ہیں تو سَ مشابہت کا مرکز ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ س سَ، مشابہت کے دائرہ کا ایک قطر ہے۔

۱۱ — ا ب ج د ایک دائری چار ضلعی ہے، ا ج اور ب د

نقطہ ع پر متقاطع ہوتے ہیں اور اد اور ب ج نقطہ ف پر۔ اب اور ج د پر انہیں قطر مانکر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ع ف اُس دائرہ کا قطر ہے جو اب اور ج د پر کے دائروں کے لئے مشابہت کا دائرہ ہے

۱۲۔ تظلیل کے ذریعہ اِس مسئلہ کی تعمیم کرو کہ دو دائروں کا مشابہت کا دائرہ اُن کے ہم محورہ ہوتا ہے۔

متفرق مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ جب چار نقطے ا، ب، ج، د ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں تو چار مثلثوں ب ج د، ج د ا، د ا ب، ا ب ج کے مرکز عمودی ایک مساوی دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اور یہ کہ وہ خط جو اِن دائروں کے مرکزوں کو ملاتا ہے نقطوں ا، ب، ج، د کے اوسط محل کے مرکز سے تین اور ایک کی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

۲۔ ا ب ج ایک مثلث ہے، اِس کے اندرونی دائرہ کا مرکز و ہے اور ا$_1$، ب$_1$، ج$_1$ اُن دائروں کے مرکز ہیں جو علی الترتیب اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو مس کرنیوالے جانبی دائرے ہیں۔ ل، م، ن وہ نقطے ہیں جہاں اضلاع ب ج، ج ا، ا ب، زاویوں ا، ب، ج کے ناصفوں سے منقطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ تین مثلثوں ل ب$_1$ ج$_1$، م ج$_1$ ا$_1$، ن ا$_1$ ب$_1$ کے عمودی مرکزوں سے ایک مثلث بنتا ہے جو ا$_1$ ب$_1$ ج$_1$ کے متشابہ اور متشابہاً واقع ہوتا ہے اور اسکا مرکز عمودی و ہے۔

۳۔ ا ب ج ایک مثلث ہے اور اِس کا اندرونی دائرہ ا، ب، ج کے مقابل کے اضلاع کو علی الترتیب نقطوں ل$_1$، م$_1$، ن$_1$ پر مس کرتا ہے ب اور ج کے لحاظ سے ل$_1$ کا موسیقی مزدوج ل$_2$ لیا گیا ہے، اور اسی طرح

$م_{۲}$ اور $ن_{۲}$ لئے گئے ہیں۔ $ل_{۱}$ $ل_{۲}$، $م_{۱}$ $م_{۲}$، $ن_{۱}$ $ن_{۲}$ کے وسطی نقطے ن، ق، ر ہیں۔ نیز $ا_{۱}$، زاویہ ا کا ناصف ہے جو ب ج کو $ا_{۱}$ پر قطع کرتا ہے اور $ا_{۲}$، ب اور ج کے لحاظ سے $ا_{۱}$ کا موسیقی مزدوج ہے، اسی طرح $ب_{۲}$ اور $ج_{۲}$ لئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط $ا_{۲}$ $ب_{۲}$ $ج_{۲}$، خط ن ق ر کے متوازی ہے۔

۴۔ ا ب ج ایک مثلث ہے جس کے اندرونی دائرہ کا مرکز و اور محائط دائرہ کا مرکز وَ ہے اور جانبی دائروں کے مرکز $و_{۱}$، $و_{۲}$، $و_{۳}$ ہیں۔ و $و_{۱}$، $و_{۲}$ $و_{۳}$ اضلاع ا ب اور ب ج سے علی الترتیب ل اور م پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ و وَ، ل م پر عمود ہے۔

۵۔ اگر ایک دئے ہوئے مثلث کے اضلاع پر انہیں قطر مانکر دائرے کھینچے جائیں اور اِن دائروں میں چار ضلعی کھینچے جائیں جن کے وتر مرکز عمودی پر متقاطع ہوں اور ہر ایک کا ایک ضلع متناظر عمود کے اوپر کے مقطوع کے وسطی نقطہ میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ اِن چار ضلعیوں کے وہ اضلاع جو مذکورہ اضلاع کے مقابل ہیں ایک مثلث بناتے ہیں جو دئے ہوئے مثلث کے ساتھ مساوی الزاویہ ہے۔

۶۔ دو دائرے ایسے ہیں کہ ایک میں ایک چار ضلعی کھینچا جا سکتا ہے جس کے اضلاع دوسرے دائرہ کو مس کرتے ہیں اگر ضلعوں کے نقاط تماس ن، ق، ر، س ہوں تو ثابت کرو کہ ن ق ر س کے وتر علی العوام ہیں اور ن ق، ر س اور ق ر، س ن کے نقاط تقاطع ایک ہی ثابت خط پر واقع ہوتے ہیں۔

(277)

۷۔ مثلث ا ب ج کے راس ا میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو اضلاع ج ا، ا ب کے نقاط وسطی ع اور ف کو قاعدہ کے نقطہ وسطی د کے ساتھ ملانے والے خطوط مستقیم د ع اور د ف سے نقطوں

ل اور ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ب ما ج ل کے متوازی ہے۔

۸ — چار متقاطع خطوط ایک مستوی میں کھینچے گئے ہیں۔ اس مستوی کے کسی نقطہ کے لحاظ سے اس مسئلہ کا تکافی معلوم کرو کہ ان چار خطوں سے بننے والے مثلثوں کے حائط دائرے ایک مشترک نقطہ میں سے گذرتے ہیں جو ان کے مرکزوں کے ساتھ ہم دائرہ ہے۔

۹ — ایک قطع زائد پر ع اور ف دو ثابت نقطے ہیں اور ن ایک متحرک نقطہ ہے۔ ن ع ایک متقارب سے ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ع میں سے گذرنے والا وہ خط جو دوسرے متقارب کے متوازی ہے اس خط سے جو ق میں سے گذرتا ہے اور ن ف کے متوازی ہے ایک ثابت نقطے پر ملتا ہے۔

۱۰ — کوئی قطع مکافی دو ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہوا کھینچا گیا ہے اور اس کا مرتب ایک ثابت نقطہ ن میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مکافی کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی کا لفاف ایک مخروطی ہے۔

۱۱ — بتاؤ کہ دی ہوئی شکل کا ایک مثلث کس طرح بنایا جا سکتا ہے جس کے ضلع تین دئے ہوئے نقطوں میں سے گذریں۔

۱۲ — ایک قطع زائد کھینچو جسکے متقارب ایک دئے ہوئے مثلث کے دو ضلع ہوں اور جس کا ایک عماد مثلث کا قاعدہ ہو۔

۱۳ — ایک قطع ناقص کا ایک مماس کھینچا گیا ہے اس طور پر کہ مماس کا وہ حصہ جو مساوی مزدوج قطروں سے منقطع ہوتا ہے اقل ہے۔ ثابت کرو کہ یہ حصہ نقطہ تماس پر تنصیف ہوتا ہے۔

۱۴ — ایک متوازی الاضلاع، ایک نقطہ اور ایک خط مستقیم ایک ہی مستوی میں دئے گئے ہیں۔ ایک ایسا خط کھینچنے کے لئے عمل معلوم کرو (جو صرف پٹڑی پر منحصر ہو) کہ وہ دئے ہوئے نقطہ میں سے گذرے اور دئے ہوئے خط کے متوازی ہو۔

۱۵ — ثابت کرو کہ ایک مثلث کو بنانیکا مسئلہ جس کے اضلاع تین

ثابت نقطوں میں سے گذریں اور جس کے راس تین ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہوں ہے جبکہ تین دئے ہوئے نقطے ہم خط ہوں اور تین دئے ہوئے خطوط مستقیم ہم نقطہ ہوں ۔

۱۶ — ایک مستوی میں ا، ب، ج، د چار نقطے ہیں جن میں سے کوئی تین ہم خط نہیں ہیں اور ایک ظلی استحالہ ا اور ب کو باہم اور نیز ج (278) اور د کو باہم تبدیل کرتا ہے ۔ اس نقطہ کے لئے پنسل اور پیرٹاڈی کا عمل بناؤ جسمیں کوئی اختیاری نقطہ ن تبدیل ہوتا ہے ۔ نیز ثابت کرو کہ ا، ب، ج، د میں سے گذرنیوالا کوئی مخروطی خود میں تبدیل ہوتا ہے ۔

۱۷ — تین قطعات زائد کھینچے گئے ہیں جنمیں سے ایک کے ماسکے ب اور ج، دوسرے کے ج اور ا اور تیسرے کے ا اور ب ہیں اور جو علی الترتیب ا، ب، ج میں سے گذرتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ یہ قطعات زائد دو مشترک نقطے ن اور ق رکھتے ہیں اور ایک مخروطی ایسا موجود ہے جو ا ب ج کو محیط کرتا ہے اور جس کے ماسکے ن اور ق ہیں ۔

۱۸ — تین مثلثوں کے قاعدے ایک دئے ہوئے خط پر اور ان کے راس ایک دوسرے دئے ہوئے خط پر ہیں ۔ مثلثوں کے ہر زوج میں ایک مثلث کا ایک ضلع اور دوسرے مثلث کا ایک ضلع لیکر ان دو ضلعوں کے نقطہ تقاطع کو ان مثلثونکے دوسرے دو ضلعوں کے نقطہ تقاطع کے ساتھ ملانے سے چھ خطوط حاصل کئے گئے ہیں، ان خطوں کے حاصل کرنے میں مثلثوں کے ازواج اور ضلعوں کے ازواج ہر ممکن طریقہ پر منتخب کئے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ یہ چھ خطوط ایک مکمل چار زاوئی بناتے ہیں ۔

۱۹ — ثابت کرو کہ حسب ذیل مسئلہ کے بالعموم چار جداگانہ حل ہیں :

دو مخروطی کھینچنا جنکا ماسکہ ایک دیا ہوا نقطہ ہو اور جو دو دوسرے دئے ہوئے نقطوں پر علی القوائم متقاطع ہوں ۔

ہر صورت میں دو دئے ہوئے نقطوں پر کے مماس معلوم کرو ۔

۲۰ — ایک متساوی الاضلاع مثلث ایک ایسے دائرہ میں کھینچا گیا ہے

جس کا مرکز و ہے۔ دو ایسے قطعات زائد کھینچے گئے ہیں جن میں سے ایک کا ماسکہ ج ہے اور مرتب و ا ہے اور وہ (زائد) ب میں سے گذرتا ہے، دوسرے کا ماسکہ ج ہے اور مرتب و ب ہے اور وہ (زائد) ا میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ قطعات زائد دائرہ سے آٹھ نقطوں پر ملتے ہیں اور یہ نقطے اور نقطہ ج ملکر ایک منتظم نو ضلعی کے راس بنتے ہیں۔

۲۱ — ایک قطع ناقص جسکا مرکز و ہے ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو مس کرتا ہے اور و ا، و ب، و ج کے مزدوج قطر کسی مماس سے علی الترتیب د، ع، ف پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا د، ب ع، ج ف ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۲۲ — ایک قطع مکافی ایک ثابت خط مستقیم کو ایک دئے ہوئے نقطہ پر مس کرتا ہے اور اسکا محور ایک دوسرے دئے ہوئے نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ راس پر کے مماس کا لفاف ایک قطع مکافی ہے، اس مکافی کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

۲۳ — تین قطعات مکافی ایک دیا ہوا مشترک مماس رکھتے ہیں اور ایک دوسرے کو نقطوں ن، ق، ر پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطے ن، ق، ر ہم خط ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ وہ قطع مکافی جو دئے ہوئے خط کو اور ن، ق، ر پر کے مماسوں کو مس کرتا ہے اپنا محور ن ق ر کے متوازی رکھتا ہے۔

۲۴ — ثابت کرو کہ ایک قطع مکافی اور اِس کے دائرہ اِنحنا کے مشترک وتر کے وسطی نقطہ کا طریق دوسرا قطع مکافی ہے جسکا وتر خاص دئے ہوئے مکافی کے وتر خاص کا پانچواں حصہ ہے۔

۲۵ — تین دائرے ایک دئے ہوئے نقطہ و میں سے گذرتے ہیں اور ان کے دوسرے نقاط تقاطع ا، ب، ج ہیں۔ دائرہ و ب ج پر ایک نقطہ د، دائرہ و ج ا پر ایک نقطہ ع اور دائرہ و ا ب پر ایک نقطہ ف لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ا ف × ب د × ج ع

= ف ب × د ج × ع ا جہاں اف سے وتر اف مراد ہے اور علیٰ ہذا تو، د، ع، ف ہم دائرہ ہیں۔ نیز علامتوں کی جو قرار داد اختیار کرنی ہوگی واضح کرو۔

۲۶ ـــ ثابت کرو کہ دو ہم ماسکی قطعات مکانی کے ایک مشترک مماس کے محاذی ماسکہ پر ایسا زاویہ بنتا ہے جو مکافیوں کے محوروں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے۔

۲۷ ـــ ایک مثلث ا ب ج کے راس ا، ب ثابت ہیں اور زاویہ ا کے ناصف کا پائین ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہے۔ ج کا طریق معلوم کرو۔

۲۸ ـــ ایک خط مستقیم ا ب ج د، دو ثابت دائروں لا اور ما کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ لا کا وتر اب، ما کے وتر ج د کے مساوی ہے۔ لا کے نقطوں ا اور ب پر کے مماس، ما کے نقطوں ج اور د پر کے مماسوں سے چار نقطوں ن، ق، ر، س پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن، ق، ر، س ایک ثابت دائرہ پر واقع ہیں۔

۲۹ ـــ ایک ثابت خط مستقیم اب پر دو نقطے ن اور ق ایسے لئے گئے ہیں کہ ن ق کا طول مستقل ہے۔ لا اور ما دو ثابت نقطے ہیں اور لا ن اور ما ق ایک نقطہ ر پہ ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ جیسے ن، اب پر حرکت کرتا ہے ر کا طریق ایک قطع زائد ہے جسکا ایک متقارب اب ہے۔

۳۰ ـــ ایک قطع مکافی ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، اب کو علی الترتیب د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم ا د، ب ع، ج ف ایک نقطہ پر ملتے ہیں جو مثلث اب ج کے مرکز ثقل کے قطبی پر واقع ہے۔

۳۱ ـــ اگر دو مخروطی ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے جائیں تو ان کے نقاط تقاطع میں سے کسی پر کے دو مماس چار ضلعی کے کسی وتر کو موسیقی طور پر قطع کرینگے۔

۳۲ — ایک مثلث ا ب ج میں ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جس کا مرکز و ہے دائرہ کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ب ج کو د پر قطع کرتا ہے۔ و میں سے گذرنیوالا وہ خط جو و د پر عمود ہے ن د سے دَ پر ملتا ہے۔ اسطرح متناظر نقطے عَ، فَ معلوم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا دَ، ب عَ، ج فَ متوازی ہیں۔

۳۳ — ایک دائرہ پر دو نقطے اس طریقہ سے لئے گئے ہیں کہ ایک ثابت نقطہ سے اِن کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اُس وتر کا لفاف جو اِن دو نقطوں کو ملاتا ہے ایک قطع مکافی ہے۔

۳۴ — ایک متغیر خط ن ق دو ثابت خطوں کو نقطوں ن اور ق پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ ایک تیسرے ثابت خط پر ن ق کے قائم ظل کا طول مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق کا لفاف ایک قطع مکافی ہے، نیز اس کے محور کی سمت معلوم کرو۔

(280) ۳۵ — ایک دئے ہوئے قطع ناقص (ا) کے ایک ماسکہ کو ماسکہ اور کسی نقطہ ن پر کے مماس کو مرتب مانکر ایک دوسرا قطع ناقص (ب) کھینچا گیا ہے جو (ا) کے مشابہ ہے۔ ثابت کرو کہ (ب)، (ا) کے محور اصغر کو اُس نقطہ پر مس کرتا ہے جہاں ن پر کا مماس اُس سے ملتا ہے۔

۳۶ — ایک قطع مکافی دو ثابت خطوں کو جو ت پر متقاطع ہوتے ہیں مس کرتا ہے اور اسکا محور ایک ثابت نقطہ د میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر س ماسکہ ہو تو زاویہ ت س د کا ناصف سمت میں ثابت ہے نیز ثابت کرو کہ س کا طریق ایک قائم زائد ہے جس کے ایک قطر کے سرے د اور ت ہیں۔ اس کے متقاربوں کی سمتیں کیا ہونگی؟

۳۷ — اگر ایک قطع ناقص کا ایک ماسکہ دیا گیا ہو اور قطع ناقص دو ثابت خطوط مستقیم کو مس کرے تو ثابت کرو کہ مرتب دائرہ دو ثابت نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

۳۸ — ایک مثلث ا ب ج کے مستوی میں و کوئی نقطہ ہے اور

اضلاع ب ج، ج ا، ا ب میں علی الترتیب نقطے لا، ما، ے ایسے ہیں کہ ا و لا، ب و ما، ج و ے قائمہ زاوے ہیں۔ اگر ج ے اور ا لا، ا لا اور ب ما کے نقاط تقاطع ق اور ر ہوں تو ثابت کروکہ و ق اور و ر، و ا سے مساوی میلان رکھتے ہیں۔

۳۹۔ ایک چار ضلعی کے وتروں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط کھینچا گیاہے اور اِس پر کسی دو ضلعوں کے درمیان جو مقطوعہ حاصل ہوتا ہے اس کے وسطی نقطہ کو اُس نقطہ سے ملایا گیاہے جس پر یہ دو ضلع متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کروکہ اِس طریقہ سے جو چھہ خط حاصل ہوتے ہیں وہ اور وسطی نقطوں کا خط اور چار ضلعی کے خود تین وتر ایک قطع مکافی کو مس کرتے ہیں۔

۴۰۔ مثلثات ا$_{۱}$ب$_{۱}$ج$_{۱}$، ا$_{۲}$ب$_{۲}$ج$_{۲}$ ایک دئے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے متکافی ہیں۔ ب$_{۲}$ج$_{۲}$ اور ج$_{۱}$ا$_{۱}$ نقطہ ن$_{۱}$ پر متقاطع ہوتے ہیں اور ب$_{۱}$ج$_{۱}$ اور ج$_{۲}$ا$_{۲}$ نقطہ ن$_{۲}$ پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کروکہ مثلثات ن$_{۱}$ا$_{۱}$ب$_{۲}$، ن$_{۲}$ا$_{۲}$ب$_{۱}$ کو محیط کرنے والے دائروں کا بنیادی محور دئے ہوئے دائرہ کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۴۱۔ ایک قاطع ایک مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو نقطوں ن، ق، ر پر قطع کرتا ہے اور نیز علی الترتیب ا، ب اور ج میں سے گذرنیوالے تین ہم نقطہ خطوں کو نَ، قَ، رَ پر قطع کرتا ہے ثابت کروکہ

ن قَ × ق رَ × ر نَ = ـ نَ ق × قَ ر × رَ ن

۴۲۔ ایک مثلث ا ب ج کے مستوی میں کسی نقطہ و میں سے ایک قاطع کھینچا گیا ہے جو مثلث کے ضلعوں کو ن، ق، ر پر قطع کرتا ہے۔ خطوط و ا، و ب، و ج کی تنصیف اَ، بَ، جَ پر کیگئی ہے اور قاطع کے مقطوعوں ق ر، ر ن، ن ق کی تنصیف نَ، قَ

رَ پر کھینچی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ تین خط اَنَ، بَقَ، جَرَ ہم نقطہ ہیں۔

۴۳ — ایک دئے ہوئے دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے ایک دئے ہوئے
دائرہ کے مماس ن ق، ن قَ کھینچے گئے ہیں، اس دوسرے دائرہ کا مرکز
پہلے دائرہ کے محیط پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اُن نقطوں کو ملانیوالا وتر جہاں (281)
یہ مماس پہلے دائرہ کو قطع کرتے ہیں سمت میں ثابت ہے اور ق قَ کو
مرکزوں کے خط پر قطع کرتا ہے۔

۴۴ — اگر کوئی قطع مکافی ایک ثابت مثلث کے ضلعوں کو مس کرتا ہوا کھینچا جائے تو ہر وتر تماس ایک ثابت نقطہ میں سے گذریگا۔

۴۵ — ا اور ب، ایک قطع زائد کی مخالف شاخوں پر واقع ہیں۔ اب کے وسطی نقطہ د سے مماس د ن کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ج ق اور ج ر وہ نیم قطر ہوں جو اب اور د ن کے متوازی ہیں

اب : ج ق = ۲ د ن : ج ر

۴۶ — ایک مثلث اب ج کے ضلع ب ج کو م اور ن پر تین مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ مثلث کے اندر دائرے کھینچے گئے ہیں جنمیں سے ایک دائرہ، ب ج کو م پر اور اب کو ھ پر مس کرتا ہے اور دوسرا، ب ج کو ن پر اور اج کو ک پر مس کرتا ہے۔ اگر دائرے ایک دوسرے کو ل پر مس کریں تو ثابت کرو کہ ج ھ اور ب ک ل میں سے گذرتے ہیں۔

۴۷ — اب ج ایک مثلث ہے اور ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر عمود کھینچے گئے ہیں جو اِن ضلعوں سے علی الترتیب ل، م، ن پر ملتے ہیں۔ تین مخروطی کھینچے گئے ہیں جن میں سے ایک، ب م اور ج ن کو علی الترتیب م اور ن پر مس کرتا ہے اور ا میں سے گذرتا ہے، دوسرا، ج ن اور ا ل کو ن اور ل پر مس کرتا ہے اور ب میں سے گذرتا ہے، تیسرا، ا ل اور ب م کو ل اور م پر مس کرتا ہے اور ج میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا، ب، ج پر وہ تمام ایک ہی مخروطی کو

مس کرتے ہیں ۔

۴۸ ۔ ایک قطع مکافی دو ثابت خطوں کو جو ت پر متقاطع ہوتے ہیں مس کرتا ہے اور وتر تماس ایک ثابت نقطہ ا میں سے گذرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ مرتب ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور نسبت ت و : و ا ا کے تمام محلوں کے لئے ایک ہی رہتی ہے ۔ نیز یہ ثابت کرو کہ اگر ا ایک دائرہ پر حرکت کرے جسکا مرکز ت ہو تو ا و ہمیشہ ایک قطع ناقص کا عماد ہوگا جس کے نیم محوروں کا مجموعہ اس دائرہ کا نصف قطر ہوگا ۔

۴۹ ۔ ایک دئے ہوئے دائرہ میں ایسے مثلث کھینچے گئے ہیں جن کا مرکز ہندسی دیا ہوا ہے ان مثلثوں میں ایسے مخروطی کھینچے گئے ہیں کہ دیا ہوا مشترک مرکز ہندسی ان کا مرکز ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ تمام مخروطی ایک ہی مرتب دائرہ رکھتے ہیں ۔

۵۰ ۔ ایک قائم الزاویہ مثلث کا اندرونی دائرہ اور وہ جانبی دائرے کھینچے گئے ہیں جو قائمہ زاویہ بنانے والے ضلعوں میں سے ایک کو مس کرتا ہے ثابت کرو کہ ہر دائرہ وتر اور اس ضلع کو جن نقطوں پر مس کرتا ہے ان کو ملانیوالے خطوط علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں اور انہیں خارج کرنے پر ان میں سے ہر ایک اُس نقطہ میں سے گذرتا ہے جس پر دوسرا دائرہ باقی ضلع کو مس کرتا ہے نیز ثابت کرو کہ ان خطوں میں سے کسی ایک خط پر کسی نقطہ کے قطبی بلحاظ دو دائروں کے دوسرے خط پر ملتے ہیں اور اس سے یہ نتیجہ اخذ کرو کہ اگر ان خطوں میں سے کسی ایک خط پر کے کسی نقطہ سے دائروں کے چار مماس کھینچے جائیں تو وہ ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں ۔

۵۱ ۔ اگر ایک مثلث ن ق ر ایک مخروطی کو محیط کرے جس کا مرکز ج ہے اور اگر ق اور ر سے علی الترتیب قطروں ج ر اور ج ق پر معین کھینچے جائیں تو معینوں کے پائین کو ملانے والا خط ن ق اور ن ر کے نقاط تماس میں سے گذریگا ۔ (282)

۵۲ ۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی اور کسی نقطہ پر اس کے دائرہ انحناء کا مشترک

وتر اور اِس نقطہ پر اِن کا مشترک مماس خود اپنے مشترک مماس کی موسیقی طور پر تقسیم کرتے ہیں۔

۵۳ ـــ ثابت کرو کہ ایک مخروطی اور ایک لمسی دائرہ کے دو مشترک مماسوں کا نقطہ تقاطع اُسی ہم ماسکی مخروطی پر واقع ہوتا ہے جو نقطۂ لمس میں سے گذرتا ہے۔

۵۴ ـــ ایک مثلث ا ب ج میں ضلعوں پر عمود ا ل، ب م، ج ن ہیں اور م ن، ن ل، ل م کو جب خارج کیا جاتا ہے تو وہ ب ج، ج ا، ا ب سے ن، ق، ر پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطے ن، ق، ر، مثلث ا ب ج کے نو نقطی دائرہ اور حائط دائرہ کے بنیادی محور پر واقع ہیں اور یہ کہ ا ل ن، ب م ق، ج ن ر کے حائط دائروں کے مرکز ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔

۵۵ ـــ ایک قائم زائد کے ماسکوں میں سے گذرنے والے ایک دائرہ کو زائد کے لحاظ سے متکافی کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا متکافی ایک قطع ناقص ہے جس کا ایک ماسکہ زائد کے مرکز پر ہے اور جس کا محور اصغر اُس فاصلہ کے مساوی ہے جو زائد کے مرتبوں کے درمیان ہے۔

۵۶ ـــ ایک دائرہ تین دئے ہوئے دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہوا کھینچا جا سکتا ہے۔ اگر اِس دائرہ پر کوئی نقطہ لیا جائے تو تین دائروں کے لحاظ سے اِس کے قطبی ہم نقطہ ہونگے۔

۵۷ ـــ کسی نقطہ و سے دو ہم ماسکی مخروطیوں کے مماس و ن، و نَ، و ق، و قَ کھینچے گئے ہیں جنہیں و ن، و نَ ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں اور و ق، و قَ دوسرے کو۔ ثابت کرو کہ چار خطوط ن ق، نَ قَ، ن قَ، نَ ق سب کے سب ایک تیسرے ہم ماسکی مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۵۸ ـــ ایک خط مستقیم ن نَ ق قَ دو مخروطیوں ع اور ط کو علی الترتیب نقطوں ن، نَ اور ق، قَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

اُس چار زاوئی کے راس جس کے متقابلہ اضلاع کے ازواج ن، نَ اور ق، قَ پر کے مماس ہیں ایک مخروطی پر واقع ہیں جو ع اور ط کے چار نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

۵۹ — اگر دو قطعات مکافی ایک حقیقی مشترک خود مزدوج مثلث رکھتے ہوں تو وہ مشترک ماسکہ نہیں رکھہ سکتے۔

۶۰ — ایک مخروطی کے نقطوں ا اور ب پر کے مماس ت پر ملتے ہیں اور اَ، بَ پر کے مماس تَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ت (ا اَ بَ ب) = تَ (ا اَ بَ ب)

۶۱ — ایک دائرہ ایک مستوی میں حرکت کرتا ہے اور ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو مس کرتا ہے اور ایک ثابت نقطہ سے اِس متحرک دائرہ کے مماس کا طول ہمیشہ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ متحرک دائرہ ہمیشہ ایک دوسرے ثابت دائرہ کو مس کرتا ہے۔

(283) ۶۲ — ایک ثابت نقطہ ن سے دائروں کے ایک ہم محور نظام کے مماس کھینچے گئے ہیں اور مماسوں کے ہر زوج اور بنیادی محور سے مثلثوں کا ایک نظام حاصل کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ن، ہم محور نظام کے لحاظ سے ایک انتہائی نقطہ کے قطبی پر واقع ہو تو مثلثوں کے حائط دائرے ایک دوسرا ہم محور نظام بناتے ہیں۔

۶۳ — دو دئے ہوئے دائرے س اور سَ، ا اور ب پر متقاطع ہوتے ہیں، ا میں سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو دائروں کو مکرر ن اور نَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اُن دائروں کے دوسرے نقطہ تقاطع کا طریق جنمیں سے ایک ب، ن میں سے گذرتا ہے اور س کو علی القوائم قطع کرتا ہے اور دوسرا ب، نَ میں سے گذرتا ہے اور سَ کو علی القوائم قطع کرتا ہے وہ خط مستقیم ہے جو ب میں سے گذرتا ہے اور ا ب پر عمود ہے۔

۶۴ — چار نقطے ایک دائرہ پر واقع ہیں، اِنمیں سے ہر ایک کا خط پائین اُس مثلث کے لحاظ سے جو دیگر تین نقطوں سے بنتا ہے معلوم کیا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ ایسے چار خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۶۵ ـ ایک مخروطی پر ا، ب، ج، د چار نقطے ہیں اور ع ف خطوط ب ج، ج ا، اب کو علی الترتیب ا، ب، ج پر اور مخروطی کو ع اور ف پر قطع کرتا ہے۔ ع، ف کے لحاظ سے ا، ب، ج کے موسیقی مزدوج اَ، بَ، جَ ہیں۔ خطوط د اَ، د بَ، د جَ علی الترتیب خطوط ب ج، اب سے عہ، بہ، جہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ عہ، بہ، جہ ہم خط ہیں۔

۶۶ ـ تین دائرے و پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ان کے متعلقہ قطر دو، ع و، ف و دائروں کے دوسرے نقاط تقاطع ا، ب، ج میں سے گذرتے ہیں اور وہ دائرہ جو د، ع، ف میں سے گذرتا ہے دائروں کو مکرر گ، ھ، ے پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرے اوگ، ب و ھ، ج و ے ہم محور ہیں۔

۶۷ ـ ایک مخروطی ایک دائرہ پر کے چار نقطوں میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مخروطی کے لحاظ سے دائرہ کے مرکز کا قطبی ایک ثابت خط مستقیم کے متوازی ہے۔

۶۸ ـ مثلثات ن ق ر، نَ قَ رَ ایسے ہیں کہ ن قَ، ن رَ، نَ قَ، نَ رَ علی الترتیب نقطوں ق، ر، قَ، رَ پر ایک مخروطی کے مماس ہیں۔ ثابت کرو کہ

ن (ق ر قَ رَ) = نَ (ق ر قَ رَ)

اور یہ کہ ن، ق، ر، نَ، قَ، رَ ایک مخروطی پر واقع ہیں۔

۶۹ ـ اگر ایک درنپیچ میں ا، ب، ج، د کے مزدوج نقطے اَ، بَ، جَ، دَ ہوں اور ا اَ، ب بَ، ج جَ، د دَ کے وسطی نقطے ن، ق، ر، س ہوں تو

(ن ق ر س) = (ا ب ج د) (اَ بَ جَ دَ)

۷۰ ـ اب ج ایک مثلث ہے۔ اگر ب د ج لا، ج ع ا ما، اف ب ے

ایسی تین سمتیں ہوں کہ (لا ب ج د) × (ا ما ج ع) × (ا ب ے ف) = ۱ اور ا د، ب ع، ج ف ہم نقطہ ہوں تو لا، ما، ے ہم خط ہونگے۔

۱ ے — اگر ا ب ج ایک مثلث ہو اور ب ج پر کوئی نقطہ د ہو تو (۱) ا ب د اور ا ج د کے حائط مرکزوں کو ملانے والا خط ایک قطع مکافی کو مس کریگا (۲) اندرونی مرکزوں کو ملانیوالا خط ایک مخروطی کو مس کریگا جو زاویوں ا ب ج، ا ج ب کے ناصفوں کو مس کرتا ہے۔ (284)

اس خط کا لفاف معلوم کرو جو ان جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملاتا ہے جو علی الترتیب اضلاع ب د، ج د کو مس کرتے ہیں۔

۲ ے — دو متغیر دائرے س اور سَ، دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں۔ ان نقطوں کا طریق معلوم کرو جن کے قطبی بلحاظ س اور سَ کے ایک ہی ہوں۔

۳ ے — ایک قطع ناقص کے مماس ق ن، ق نَ ہیں اور ق م، وتر تماس ن نَ پر عمود ہے اور ک، ق م کا قطب ہے۔ اگر مثلث ن و نَ کا مرکز عمودی ھ ہو تو ثابت کرو کہ ھ ک، ق ج پر عمود ہے

۴ ے — دو دائرے ایک دوسرے کو و پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان نقطوں کا طریق جو ایسے دائروں کے لحاظ سے و کے مقلوب ہوں جو دو دئے ہوئے دائروں کو مس کرتے ہیں ایک دوسرا دائرہ ہے جو دئے ہوئے دائروں کو و پر مس کرتا ہے۔ نیز اِس دائرہ کا نصف قطر دئے ہوئے دائروں کے نصف قطروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

۵ ے — ثابت کرو کہ ایک قطع مکافی کے نقاط ا اور ج پر کے مماس اور وتر ا ج، ب میں سے گذرنے والے قطر سے ایسے نقطوں ا، ج، ب پر ملتے ہیں کہ ا ب : ب ب = ا ب : ب ج = ب ب : ج ب جہاں ب مکافی پر ایک تیسرا نقطہ ہے۔ اس کی مدد سے ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے مکافی کا ایک وتر کھینچو جو اِس نقطہ پر ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم ہو جائے۔ اِس مسئلہ کے کتنے مختلف حل ہیں۔

۷۶ — اگر ایک قطع زائد پر تین نقطے ا، ب، ج ہوں اور دونوں متقاربوں کی سمتیں دی گئی ہوں تو ب پر کا مماس کھینچنے کے لئے ذیل کا عمل ثابت کرو:— ا میں سے ایک متقارب کے متوازی ایک خط کھینچو جو ب ج کو د پر ملتا ہے۔ ج میں سے دوسرے متقارب کے متوازی ایک خط کھینچو جو اب کو ھ پر ملتا ہے۔ د ھ کو ملاؤ اور ب میں سے د ھ کے متوازی خط کھینچو۔ یہی ب پر کا مماس ہوگا۔

۷۷ — ایک دائرہ تین دئے ہوئے دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے، ان دائروں کو سا، ا، ب، ج سے موسوم کرکے ثابت کرو کہ وہ نقطے جہاں ج سا کو قطع کرتا ہے وہ نقطے ہیں جہاں ا اور ب کے ہم محور دائرے ج کو مس کرتے ہیں۔

۷۸ — اگر دو ہم مستوی مثلثات اجب، د ع ف ہوں اور س ایک ایسا نقطہ ہو کہ س د، س ع، س ف اضلاع ب ج، ج ا، اب کو علی الترتیب تین ہم خط نقطوں میں قطع کرتے ہیں تو س ا، س ب، س ج اضلاع ع ف، ف د، د ع کو تین ہم خط نقطوں میں قطع کرینگے۔

۷۹ — اب ج ایک مثلث ہے، اسکے اس جانبی دائرہ کا نقطہ تماس جو ب ج کو مس کرتا ہے نقطہ د ہے، اسی طرح ج ا اور اب پر نقاط تماس ع اور ف معلوم کئے گئے ہیں۔ ب ج، ج ا، اب کے وسطی نقطوں میں سے خطوط علی الترتیب ا د، ب ع، ج ف کے متوازی کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ خطوط اندرونی مرکز پر ملتے ہیں۔

(تمت بالخیر)

۷۸۶

اشاریہ

علم ہندسۂ نظری

نوٹ: اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

امدادی دائرہ، ۲۱۷، ۲۲۵، ۲۴۳، ۲۹۷
انتہائی نقطے، ۳۰
اندرونی دائرہ، ۱۳، ۳۷۱
بریانکاں کا مسئلہ، ۳۱۰
بنیادی محور، ۲۵
پیاسکال کا مسئلہ، ۳۰۸
تعمیم بذریعہ تطلیل، ۳۵۴
جانبی دائرے، ۱۳، ۳۷۱
چارزاوی، ۱۱۰، ۳۱۸، ۳۲۰
چارضلعی، ۱۰۸، ۱۷۷، ۳۱۸، ۳۲۰، ۳۲۳، ۳۵۲
حائط دائرہ، ۱، ۷، ۱۹۴، ۳۴۸
خط پائین، ۸، ۱۹۴

خطوط وسطی، ۱۱

خود مزدوج مثلث، ۲۳، ۱۷۷، ۳۳۷، ۳۴۸

دائرہ انحناء، ۱۷۶، ۲۰۱، ۲۳۲، ۲۷۲

دائری نقطے، ۳۴۴

درپیچ جانچ، ۱۱۶

درپیچ خواص، ۱۲۲، ۱۳۵، ۳۱۲، ۳۲۱، ۳۲۵

دوہرا تماس، ۳۴۹، ۳۵۸

ڈیسارگ کا مسئلہ، ۳۲۵

ذو اربعۃ الاضلاع، ۱۰۸، ۱۷۷، ۲۱۸، ۳۲۰، ۳۲۳، ۳۵۲

زیر عماد، ۱۸۷

سامن کا مسئلہ، ۲۴

سمسن کا خط، ۹

سیوا کا مسئلہ، ۴۸

شبہ وسطی، ۵۳

ضد متوازی، ۵۴

طریق، ۳۴، ۱۸۶، ۲۰۰، ۲۲۴، ۲۶۲

ظلی خواص، ۶۳، ۱۷، ۷۶، ۱۳۳

علامتیں، ۴۰، ۱۷۳، ۲۶۳

علی القوائم دائرے، ۳۱، ۱۰۴

عماد، ۱۶۴، ۱۸۶، ۲۱۳، ۲۱۹، ۲۴۲، ۲۷۱

فویرباخ کا مسئلہ، ۳۰۷۱

قائم درپیچ، ۱۲۴، ۱۳۶

قطب اور قطبی، ۱۹، ۱۳۳، ۳۲۸

قطر، ۱۵۴، ۱۹۳

کارنو کا مسئلہ، ۱۶۹

لفاف، ۱۹۰، ۲۱۶، ۳۰۶
ماسکہ اور مرتب، ۱۳۲، ۱۳۶، ۱۴۰، ۱۵۷، ۳۳۳، ۳۵۰
مبدل، ۱۹۹
متساوی الزاویہ مزدوج، ۵۲
متشابہ اشکال، ۳۸۱
متقارب، ۱۴۹، ۱۵۵
متکافی اشکال، ۳۱۶، ۳۳۹
متوازی وتر، ۱۳۸
مثلثات منظرہ میں، ۹۱
محاور، ۱۴۶، ۱۵۱، ۱۵۵، ۲۴۵
مرتب دائرہ، ۲۲۱، ۲۴۸
مرکز عمودی، ۲، ۱۹۵، ۲۸۲، ۳۳۲
مزدوج زائد، ۲۴۹
مزدوج قطر، ۲۲۲، ۲۲۸، ۲۵۵، ۲۷۹
مزدوج نقطے اور خطوط، ۲۲، ۱۰۶
مساوی مزدوج، ۲۲۹
مشابہت کا دائرہ، ۳۵، ۳۸۵
مشابہت کے مرکز، ۳۴
معین، ۱۵۵
مقلوب نقطے، ۱۹، ۳۶۳، ۳۷۰
مماس، ۱۵۷، ۱۸۶، ۲۱۲، ۲۴۱
مماسوں کا زوج، ۱۶۱، ۱۹۰، ۲۱۷، ۲۲۰، ۲۴۶
موسیقی خواص، ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۳۳
مینلاس کا مسئلہ، ۴۵
نو نقطی دائرہ، ۴، ۲۸۴، ۳۷۱

نیوٹن کا مسئلہ، ۱۷۰، ۱۸۵، ۲۰۰، ۲۲۳، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۳
وتر خاص، ۱۶۵، ۱۸۴
ہم خطگی، ۴۵، ۸۹، ۳۰۸
ہم اسم مستقیم، ۷۷، ۸۳، ۸۴، ۸۷
ہم ماسکی مخروطی، ۲۴۳، ۳۳۵، ۳۳۷، ۳۵۲
ہم محور دائرے، ۲۸، ۳۲۳، ۳۳۵
ہم نقطگی، ۷۴
ہم وضع اشکال، ۳۷۹

اصطلاحات

علم ہندسۂ نظری

علم ہندسۂ تحلیلی	Analytical Geometry
غیر موسیقی نسبتیں	Anharmonic ratios
ضد متوازی	Antiparallel
متقارب	Asymptotes
امدادی دائرہ	Auxiliary circle
ظِل کا محور	Axis of projection
ناصف	Bisector
مرکز دار مخروطی	Central conics
مرکز انحناء	Centre of curvature
منظرہ کا مرکز	Centre of perspective
مرکز مشابہت	Centre of similitude
مرکز ہندسی	Centroid
وتر	Chord
دائرہ انحناء	Circle of curvature
مشابہت کا دائرہ	Circle of similitude
دائری نقطے	Circular points

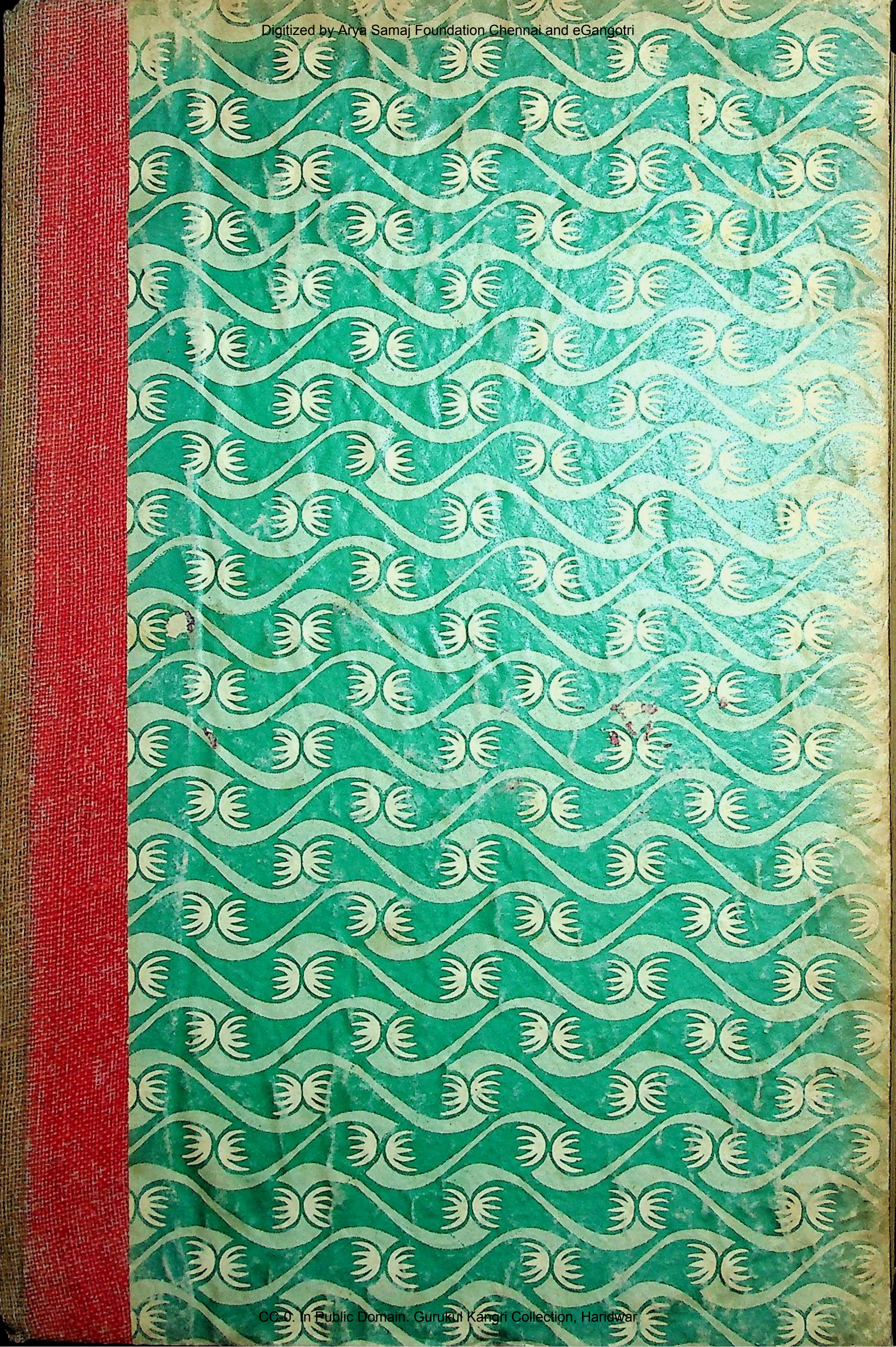
حائط مرکز	Circumcentre
حائط دائرہ	Circumcircle
حائط کرنا	Circumscribe
ہم محور	Coaxal
ہم خط	Collinear
ہم خطگی	Collinearity
ہم دائری	Concyclic
ہم نقطگی	Concurrence
ہم نقطہ	Concurrent
مخروط	Cone
ہم ماسکی	Confocal
ہم ماسکی مخروطی	Confocal conics
مخروطی	Conic
مخروطی تراشیں	Conic sections
مزدوج محاور	Conjugate axes
مزدوج قطر	Conjugate diameters
مزدوج خطوط	Conjugute lines
مزدوج نقطے	Conjugate points
ہم مستوی	Coplaner
چلیپہ نسبتیں	Cross-ratios
دائری	Cyclic
علم ہندسہ بیانیہ	Descriptive Geometry
قطر	Diameter
راست مشترک مماس	Direct common tangents
مرتب	Directrix

مرتب دائرہ	Director circle
دوہرا التماس	Double contact
دوہرا معُین	Double ordinate
خروج المرکز	Eccentricity
جانبی دائرہ	Ecircle
جانبی مرکز	Ecentre
قطع ناقص	Ellipse
لفاف	Envelope
مساوی مزدوج قطر	Equi-conjugate diameters
ہم چلیپیہ	Equi-cross
ماسکی فاصلہ	Focal distance
ماسکہ	Focus
مکون	Generating line
موسیقی اوسط	Harmonic mean
موسیقی نسبتیں	Harmonic ratios
موسیقی تراش	Harmonic section
ہم رسم	Homographic
ہم وضع	Homothetic
قطع زائد	Hyperbola
خیالی	Imaginary
اندرونی مرکز	Incentre
اندرونی دائرہ	Incircle
مقلوب نقطے	Inverse points
انقلاب	Inversion
درپیچ	Involution

Involution pencil	درپیچ پنسل
Isogonal cojugates	متساوی الزاویہ مزدوج
Latus rectum	وتر خاص
Limiting points	انتہائی نقطے
Line at infinity	لاانتاہی پرکا خط
Locus	طریق
Mate	زوج
Mean propotional	وسط تناسب
Median	خط وسطی
Nine-point centre	نونقطی مرکز
Nine-point circle	نونقطی دائرہ
Non-coplanar	غیرہم مستوی
Normal	عماد
Ordinate	معین
Orthocentre	مرکز عمودی
Orthogonal	علی القوائم
Orthogonal projection	قائم ظل
Parabola	قطع مکافی
Pedal line	خط پائیں
Pedal triangle	مثلث پائیں
Pencil	پنسل
Perspective	منظرہ
Point-circles	نقطہ دائرے
Point of intersection	نقطہ تقاطع

Pole	قطب
Polar	قطبی
Projection	ظل، تظلیل
Quadrangle	چار زاوئی
Quadrilateral	چار ضلعی، ذو اربعۃ الاضلاع
Radical axis	بنیادی محور
Range	سعت
Ray	شعاع، کرن
Reciprocal	متکافی
Reciprocation	مکافات
Rectangular hyperbola	قائم زائد
Rhombus	معین
Self-polar	خود قطبی
Semi axes	نیم محاور
Similar	متشابہ
Similarly situated	متشابہاً واقع
Sub-normal	زیر عماد
Sub-tangent	زیر مماس
Symmedian	شبیہ وسطی
Symmedian point	شبیہ وسطی نقطہ
Transverse common tangents	قاطع مشترک مماس
Vanishing line	خط منعدم
Vertex	راس

पुस्तकालय
गुरुकुल कांगड़ी

Entered in Database
13/2/06
Signature with Date